Les polynômes du second degré – Fiche de cours

1. Les trinômes du second degré

a. Forme développée et réduite

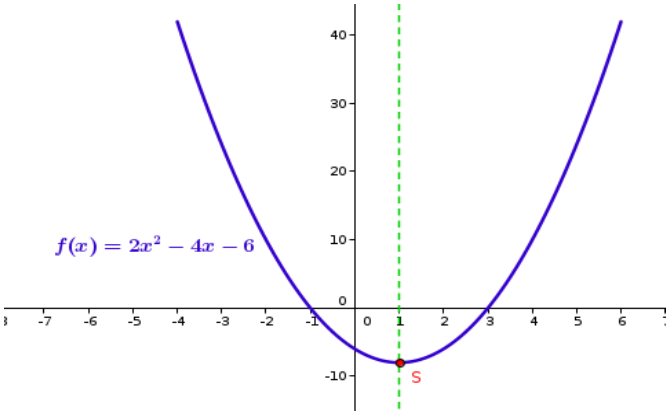
Un trinôme du second degré est défini par :

$$P(x)=ax^2+bx+c \qquad a\neq 0 \qquad b\in R \qquad c\in R$$

Un trinôme du second degré est défini sur ℝ

La représentation graphique d'un trinôme du second degré est une parabole symétrique par rapport à la droite d'équation :

$$x=-\frac{b}{2a}$$



b. Forme canonique

Un trinôme du second degré peut s'écrire avec l'expression (forme canonique) :

$$P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta \qquad avec \quad \alpha=-\frac{b}{2a} \qquad et \quad \beta=f(\alpha)$$

c. Variation

- $a>0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	β	↗ $+\infty$

La parabole est dirigée vers le haut

- $a<0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	β	↘ $-\infty$

La parabole est dirigée vers le bas

Les coordonnées du sommet S sont donc : $S(\alpha\ ;\ \beta)$

2. Résolution de l'équation P(x)=ax²+bx+c=0

a. Le discriminant

Le discriminant d'un trinôme du second degré est défini par :

$$\Delta=b^2-4ac$$

b. Les racines réelles

On appelle racine réelle d'un trinôme du second degré la(es) valeur(s) de x qui vérifie(nt) l'équation P(x)=0, tel que x ∈ℝ

- <u>si Δ<0</u>

Il n'y a pas de racine sur ℝ

- <u>si Δ=0</u>

Il y a une racine double : $x_0=-\frac{b}{2a}$

- <u>Δ>0</u>

Il y a 2 racines distinctes : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Dans certains cas on peut trouver des racines évidentes -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3

c. Propriétés avec les racines

Pour $\Delta>0$, il existe des propriétés avec les racines ($a\neq 0 \quad b\in R \quad c\in R$) :

$$S=x_1+x_2 \qquad et \qquad P=x_1\times x_2 \qquad\qquad S=\frac{-b}{a} \qquad et \qquad P=\frac{c}{a}$$

Pour $a=1$, on peut écrire $P(x)=x^2-Sx+P$

d. Méthodes de factorisation

- si $\Delta<0$

Un trinôme du second degré n'est pas factorisable sur $\mathbb{R}$

- si $\Delta=0$

On peut se ramener à la factorisation utilisant une identité remarquable :

$$P(x)=a(x-x_0)^2 \qquad a\neq 0$$

- si $\Delta>0$

Un trinôme du second degré est factorisable avec l'expression :

$$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2) \qquad a\neq 0$$

3. Etude du signe d'un trinôme du second degré

a. Tableau récapitulatif

	Signe de $f(x)$
$\Delta>0$	x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $f(x)$: signe de a | 0 | signe de $-a$ | 0 | signe de a
$\Delta=0$	x : $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ $f(x)$: signe de a | 0 | signe de a
$\Delta<0$	x : $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: signe de a

4. Polynômes se ramenant à un trinôme du second degré

a. Equations et inéquations paramétriques

Une équation ou inéquation paramétrique dépend d'un paramètre définit sur $\mathbb{R}$.

Exemple : $P_m(x)=mx^2+(m-2)x+5$

b. Polynômes de degré 3

Lorsqu'un polynôme de degré 3 admet une racine évidente x_0, il peut être factorisé sur $\mathbb{R}$ comme le produit d'une fonction affine et d'un trinôme du second degré

Exemple : $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d=(x-x_0)(mx^2+px+q)$

c. Polynômes de degré n

- Les polynômes de la forme x^n-1 peuvent être factorisés par $x-1$

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)$$

- Les polynômes de la forme x^n-a^n peuvent être factorisés par $x-a$

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+a^1x^{n-2}+a^2x^{n-3}\ldots+a^{n-1})$$

d. Equations et inéquations rationnelles

Il s'agit d'une équation ou d'une inéquation qui utilisera la résolution d'un trinôme du second degré

Exemples : $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{2x-5}=\frac{9}{4} \qquad ; \qquad \frac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2}\geq 0$

5. Méthodes de résolution

a. Résolution d'une équation trinôme du second degré

Pour résoudre un trinôme du second degré (ou polynôme s'y ramenant), on peut utiliser par ordre :

- Les racines évidentes
- La factorisation avec les identités remarquables et l'équation produit nul
- Le discriminant

b. Résolution d'une inéquation

Pour résoudre une inéquation du second degré, on pourra se ramener à l'étude d'un tableau de signe

c. <u>Changement de variable</u>

- <u>changement de variable utilisant x^2 (équation bicarré)</u>

<u>Exemple</u> : $3x^4-2x^2+1=0$

Poser le changement de variable $X=x^2$ puis résoudre

- <u>changement de variable utilisant $\sqrt{x}$</u>

<u>Exemple</u> : $3x-2\sqrt{x}+1=0$

Poser le changement de variable $X=\sqrt{x}$ avec X≥0 et x≥0 puis résoudre

- <u>changement de variable utilisant</u> $\frac{1}{x}$

<u>Exemple</u> : $\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+1=0$

Poser le changement de variable $X=\frac{1}{x}$ avec x≠0 puis résoudre

6. Optimisation géométrique

Résoudre un problème de géométrie :

- poser l'inconnu (variable) à optimiser
- indiquer le domaine de définition
- se ramener à un cas de géométrie et écrire une équation ou une inéquation
- résoudre