Les polynômes du second degré – Corrigés disponibles

Exercice 1

1. $(x+3)^2-17$
2. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$
3. $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$
4. $\frac{13}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
5. $3(x+2)^2$
6. $\frac{9}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2$

Exercice 2

1. réponse b
2. réponse a
3. réponse b
4. réponse a
5. réponse a

Exercice 3

Le produit des 2 racines vaut : $x_1 x_2=\frac{c}{a}$

1. $S=\{1;6\}$
2. $S=\left\{-1;\frac{5}{3}\right\}$
3. $S=\{-5;2\}$
4. $S=\{-\sqrt{2};2\sqrt{2}\}$
5. $S=\{-3;2\}$
6. $S=\{-4;-1\}$
7. $S=\left\{-\frac{3\sqrt{5}}{2};\sqrt{5}\right\}$
8. $S=\{3;5\}$

Exercice 4

1. $x^2-x-6=0$; $\Delta=25>0$; 2 racines ; $x_1=\frac{1-5}{2}=-2$; $x_2=\frac{1+5}{2}=3$
$S=\{-2;3\}$
2. $x^2+2x-3=0$; $\Delta=16>0$; 2 racines ; $x_1=\frac{-2-4}{2}=-3$; $x_2=\frac{-2+4}{2}=1$
$S=\{-3;1\}$
3. $x^2-x+2=0$; $\Delta=-7<0$; 0 racine ; $S=\emptyset$
4. $-x^2+2x-1=0$; $\Delta=0$; 1 racine ; $x_0=1$; $S=\{1\}$
5. $y^2+5y-6=0$; $\Delta=49>0$; 2 racines ; $y_1=\frac{-5+7}{2}=1$; $y_2=\frac{-5-7}{2}=-6$
$S=\{-6;1\}$
6. $1-t-2t^2=0$; $\Delta=9>0$; 2 racines ; $t_1=\frac{1-3}{-4}=\frac{1}{2}$; $t_2=\frac{1+3}{-4}=-1$
$S=\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$
7. $x^2+x-1=0$; $\Delta=5>0$; 2 racines ; $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$
8. $2x^2+12x+18=0$; $\Delta=0$; 1 racine ; $x_0=-\frac{12}{4}=-3$; $S=\{-3\}$
9. $-3x^2+7x+1=0$; $\Delta=61>0$; 2 racines ; $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\frac{7+\sqrt{61}}{2}$
$S=\left\{\frac{7-\sqrt{61}}{2};\frac{7+\sqrt{61}}{2}\right\}$
10. $x^2+3\sqrt{2}x+4=0$; $\Delta=2>0$; 2 racines ; $x_1=-2\sqrt{2}$; $x_2=-\sqrt{2}$
$S=\{-2\sqrt{2};-\sqrt{2}\}$

Exercice 5

1. $(-1)^2+3(-1)+2=0$; donc $x_1=-1$ est racine évidente
2. $x_1 x_2=\frac{c}{a}=2$; $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-3$
3. $x_2=-2$

Exercice 6

1. $(-1)^2+3(-1)+2=0$; donc $x_1=-1$ est racine évidente
2. $x_1 x_2=\frac{c}{a}=6$; $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=5$
3. $x_2=3$

Exercice 7

1. $x^2-3x+2>0$; $S=]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[$
2. $x^2+4\geq 0$; $S=\mathbb{R}$
3. $m^2+m-20\leq 0$; $S=[-5;4]$
4. $x^2-x+1<0$; $S=\emptyset$
5. $3x^2+18x+27>0$; $S=]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$
6. $-x^2-9\geq 0$; $S=\emptyset$
7. $x(x-2)<0$; $S=]0;2[$
8. $x^2+7x+12\geq 0$; $S=]-\infty;-4]\cup[-3;+\infty[$
9. $-2x^2-x+4>0$; $S=\left]\frac{-1-\sqrt{33}}{4};\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right[$
10. $2x^2-24x+72\leq 0$; $S=\{6\}$
11. $x^2+4x-12<0$; $S=]-6;2[$
12. $2x^2-5x+7>0$; $S=\mathbb{R}$

Exercice 8

1. $g(1)=0$
2. $g(x)=(x-1)(x^2+6x-6)$
3. $S=(-3-\sqrt{15};-3+\sqrt{15};1)$

Exercice 9

$x^4-12x^2+27=0$; on pose $u=x^2\geq 0$; on résout $u^2-12u+27=0$

$u_1=3$ ou $u_2=9$; $x=\pm\sqrt{u}$

$x_1=-\sqrt{3}$; $x_2=\sqrt{3}$; $x_3=-3$; $x_4=3$; $S=\{-3;-\sqrt{3};\sqrt{3};3\}$

Exercice 10

1. $2x^2+5x+2=0$; $x=-2$; $x=-\frac{1}{2}$

2. si l'on pose $u=\frac{1}{x-1}$ avec $x\neq 1$ alors :

On résout $2u^2+5u+2=0$; $u_1=-2$; $u_2=-\frac{1}{2}$; $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=-1$

$S=\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$

3. $x+5\sqrt{x}-3=0$; on pose $u=\sqrt{x}\geq 0$ et $x\geq 0$

On résout $u^2+5u-3=0$; $S=\left(\frac{-5+\sqrt{37}}{2}\right)^2$

Exercice 11

$(m+3)x^2+2(3m+1)x+(m+3)=0$

$\Delta=32m^2-32$; $\Delta=0$ *si* $m=-1$; $m=1$

- <u>Si m =-1</u> $4x^2+8x+4=0$; $x=-1$
- <u>Si m =1</u> $2x^2-4x+2=0$; $x=1$

Exercice 12

1. $2x^2-(m+2)x+m-2=0$; si x=3 alors on résout $10-2m=0$ soit $m=5$
2. Le trinôme est pour $m=5$; $2x^2-7x+3=0$

La solution est $S=\left\{\frac{1}{2};3\right\}$

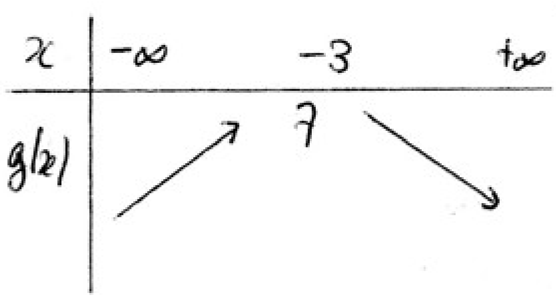
Exercice 13

1. $f(x)=4x^2-8x-5$; $f(x)=4(x-1)^2-9$ forme canonique

$f(x)=4(x-1)^2-9$ forme factorisée

$f(x)=0$; $x=\frac{5}{2}$ ou $x=-\frac{1}{2}$

2. $g(x)=-3x^2-18x-20$; $g(x)=-3(x+3)^2+7$



3. $h(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$; de plus on a $A(2;4)\in C_h$

Les 2 racines sont $x_1=0$; $x_2=4$; $h(x)=a\cdot x\cdot(x-4)$; $h(x)=x^2-4x$

Exercice 14

1. $x-5\sqrt{x}-14=0$; on pose $u=\sqrt{x}\geq 0$ et $x\geq 0$;

On résout $u^2-5u-14=0$; $u_1=-2$; $u_2=7$; $x_1=4$; $x_2=49$

2. $\sqrt{x+5}=1-x$; $1-x\geq 0$ et $x+5\geq 0$; $1\geq x$ et $x\geq -5$; $x\in]-5;1[$

$x^2-3x-4=0$; $x=-1$ et $x=4$; $S=\{-1\}$

3. $\sqrt{x^2-x-6}=\sqrt{x-1}$; $x\geq 1$ et $x\in]-\infty;-2]\cup[3;+\infty[$; $D_f=[3;+\infty[$

on résout $x^2-x-6=x-1$; $x_1=1-\sqrt{6}$; $x_2=1+\sqrt{6}$; $S=\{1+\sqrt{6}\}$

Exercice 15

$f(x)=4x^3+9x^2-16x-36$

1. $f(-2)=0$; donc -2 est une racine de f

$f(x)=(x+2)(4x^2+bx-18)$ par identification des monômes de plus haut et bas degré

En développant puis en factorisation avec les puissances de x :

$f(x)=4x^3+x^2(b+8)+x(2b-18)-36$

Par identification avec la première expression de f(x) : $b=1$

donc $f(x)=(x+2)(4x^2+x-18)$

2. $f(x)=0$; $(x+2)=0$ ou $(4x^2+x-18)=0$ par équation produit nul

$S=\left\{-\frac{9}{4};-2;2\right\}$ en résolvant le trinôme du second degré

3.

x	$-\infty$		$-9/4$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x^2+x-18$		$+$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x)\geq 0$; $S=\left[-\frac{9}{4};-2\right]\cup[2;+\infty[$

Exercice 16

$x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{97}{36}\Leftrightarrow\frac{x^4+1}{x^2}=\frac{97}{36}\Leftrightarrow 36x^4-97x^2+36=0$

Posons $X=x^2$; résolvons $36X^2-97X+36=0$; $X_1=\frac{4}{9}$; $X_1=\frac{9}{4}$

donc $x_1=-\frac{3}{2}$; $x_2=-\frac{2}{3}$; $x_3=\frac{2}{3}$; $x_4=\frac{3}{2}$

Exercice 17

$f_1(x) \leftrightarrow C_5 \quad f_1(0)=-3$ $\qquad$ $f_2(x) \leftrightarrow C_1 \quad f_2(0)=3$

$f_3(x) \leftrightarrow C_3 \quad f_3(1)=0$ $\qquad$ $f_4(x) \leftrightarrow C_4 \quad f_4(0)=3$

$f_5(x) \leftrightarrow C_2 \quad f_2(0)=\frac{1}{4}$

Exercice 18

Figure 1 : $a>0 \quad \Delta>0$ $\qquad$ Figure 2 : $a<0 \quad \Delta>0$

Figure 3 : $a>0 \quad \Delta=0$ $\qquad$ Figure 4 : $a>0 \quad \Delta<0$

Pour la figure $c=f(0)<0$

Exercice 19

1.a. $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1)=x^n-1$ en développant

1.b. $x^n-1=(x-1)\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}$

2. $u=\frac{x}{a}$; alors $x^n-a^n=a^n\left(\frac{x^n}{a^n}-1\right)=a^n(u^n-1)$ en factorisant

$$x^n-a^n=a^n\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\left(\frac{x}{a}\right)^{n-2}+\ldots+\frac{x}{a}+1\right)$$

$$x^n-a^n=(x-a)(x+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1})=(x-a)\sum_{k=1}^{n} a^{k-1}x^{n-k}$$

Exercice 20

1. $\frac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2}>0$

x	$-\infty$		-2		$-3/2$		-1		1		$+\infty$
$2x^2+5x+3$		$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^2+x-2		$+$	‖	$-$		$-$		$-$	‖	$+$	
$\frac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$S=]-\infty;-2[\cup\left]-\frac{3}{2};-1\right[\cup]1;+\infty[$

2. $(2x-1)^2>(x+1)^2 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(3x)>0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)\,3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

3. $(x+3)(x-2)<2x+6 \Leftrightarrow x^2-9<0$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-3;3[$

4. $\dfrac{x+3}{1-x} \geq -5x+3 \Leftrightarrow \dfrac{x(-5x+9)}{1-x} \geq 0$

x	$-\infty$		0		1		$9/5$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-5x+9$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$\dfrac{x(-5x+9)}{1-x}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

$S=[0;1[\cup\left[\dfrac{9}{5};+\infty\right[$

Exercice 21

a. $P(x)=(x-4)(x-7)=x^2-11x+28$

b. $P(x)=(x+5)^2=x^2+10x+25$

c. $P(x)=-(x+9)(x-8)=-x^2-x+72$

d. $P(x)=-x^2-1$

e. $P(x)=(x+6)(x+4)=x^2+10x+24$

Exercice 22

1. $f(x)=2(x-4)^2+3$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$

2. $f(x)=-3(x+1)^2-5$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	-5	$\searrow$

3. $f(x)=(x-4)^2-16$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-16	$\nearrow$

Exercice 23

1. Vrai ; en réalisant un tableau de signes pour les 2 expressions, nous obtenons pour solution : $S=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$
2. Faux ; si $x^2<16$ alors $x\in]-4;4[$

Exercice 24

1. Faux ; si $x^2\geq 9$ alors $x\leq -3$ ou $x\geq 3$
2. si $x^2\geq 9 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[$

Exercice 25

1. $(x-3)^2=25 \Leftrightarrow (x-3-5)(x-3+5)=0 \quad S=\{-2;8\}$
2. $(1-2x)^2 \geq 9 \Leftrightarrow (-2-2x)(4-2x) \geq 0 \quad S=[-1;2]$

Exercice 26

1. $-3x^2+5x-8 \leq 0$; $-3x^2+5x-8=0$ n'a pas de solution, le trinôme est du signe de -3 ; $S=\mathbb{R}$
2. $2x^2-7x+5<0$; on résout $2x^2-7x+5=0$; $x=1$ ou $x=\frac{5}{2}$; $x \in \left]1;\frac{5}{2}\right[$
3. $\frac{2x+1}{x+2} \leq 3x \Leftrightarrow \frac{-3x^2-4x+1}{x+2} \leq 0$

On résout $-3x^2-4x+1=0$; $x_1=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$; $x_2=\frac{-\sqrt{7}-2}{3}$

On construit un tableau de signes et l'on obtient :

$$x \in \left[\frac{-2-\sqrt{7}}{3};-2\right[\cup \left[\frac{-2+\sqrt{7}}{3};+\infty\right[$$