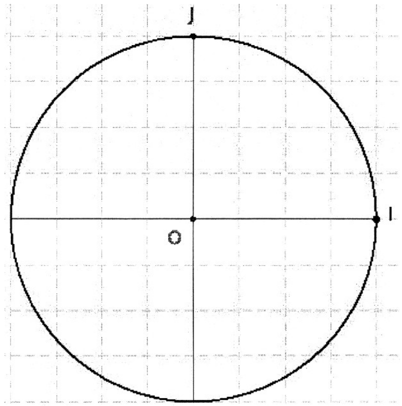
Fonctions trigonométriques – Exercices - Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

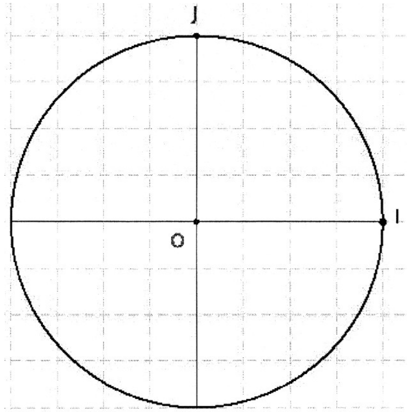
1. Placer sur le cercle trigonométrique les points représentatifs des réels suivants :

$$\frac{2\pi}{3} \ ; \ -\frac{3\pi}{4} \ ; \ \frac{17\pi}{6} \ ; \ \frac{5\pi}{2}$$



2. Déterminer la mesure principale des angles puis les placer sur le cercle trigonométrique

$$\frac{23\pi}{4} \ ; \ \frac{-20\pi}{3} \ ; \ \frac{37\pi}{8} \ ; \ \frac{-41\pi}{6}$$



Exercice 2 **corrigé disponible**

1. Sur le cercle trigonométrique, placer le point M associé à la valeur $\frac{\pi}{6}$
2. Placer les points M_1, M_2, M_3, M_4 associés aux réels $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{9\pi}{6}$, $\frac{-\pi}{6}$
3. Rappeler les valeurs de $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$
4. En déduire les valeurs des cosinus et sinus des angles suivants :

$$\frac{5\pi}{6} \ ; \ \frac{9\pi}{6} \ ; \ \frac{-\pi}{6}$$

Exercice 3 **corrigé disponible**

1. En utilisant les angles associés, exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

   a) $A = \sin(x+\pi) + \cos(x+\frac{\pi}{2}) + \sin x - \sin(-x)$

   b) $B = \cos x - \cos(x - \frac{\pi}{2}) - \sin(x-\pi) + \cos(\pi - x)$

2. Calculer les expressions suivantes en utilisant les angles associés :

   a) $C = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{23\pi}{14}$

   b) $D = \sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{11\pi}{5}$

Exercice 4 corrigé disponible

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. Sur $[0;3\pi[$: $\cos x = \cos(-\frac{2\pi}{3})$
2. Sur $]-\pi;\pi]$: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Sur $[0;4\pi[$: $\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{5}$
4. Sur $]-\pi;\pi]$: $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{4}$
5. Sur $]-\pi;\pi]$: $\cos x > \frac{-\sqrt{2}}{2}$
6. Sur $]-\pi;2\pi]$: $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. Sur $[0;2\pi[$: $\sin^2 x = \frac{1}{2}$
8. Sur $]-\pi;\pi]$: $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Exercice 5 corrigé disponible

En utilisant les angles associés, exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

1. $A = \cos(x-\pi) - \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$
2. $B = \sin x + \cos(x+\frac{\pi}{2}) + \cos x - \sin(x+\frac{\pi}{2})$

Calculer les expressions suivantes en utilisant les angles associés :

3. $C = \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{11\pi}{8} + \sin\frac{13\pi}{8}$
4. $D = \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{9\pi}{10}$

Exercice 6 corrigé disponible

Soient $x \in [-\pi;\frac{\pi}{2}]$ et M le point du cercle trigonométrique associé à x.

1. Sur le cercle trigonométrique, placer M tel que $cos(x) = -\frac{3}{4}$.

2. Calculer $sin(x)$.

3. Calculer :

a. $cos(\frac{\pi}{2}+x)$ **b.** $sin(\frac{\pi}{2}-x)$ **c.** $cos(\pi+x)$ **d.** $sin(\pi-x)$

Exercice 7 corrigé disponible

Compléter avec $\cos x$, $\sin x$, $-\cos x$ ou $-\sin x$:

$\cos(-x) = \ldots$

$\sin(-x) = \ldots$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \ldots$

$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \ldots$

$\cos(\pi+x) = \ldots$

$\sin(\pi+x) = \ldots$

$\cos(\pi-x) = \ldots$

$\sin(\pi-x) = \ldots$

$\cos(\frac{\pi}{2}+x) = \ldots$

$\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \ldots$

Exercice 8 corrigé disponible

On sait d'un réel x que $x \in [0\ ;\pi]$ et $\cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

1. Déterminer la valeur exacte de $\sin x$.
2. On sait que le réel x cherché est l'un des réels $\left\{-\frac{4\pi}{5};-\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{5};\frac{4\pi}{5}\right\}$. Qui est x ? Justifier.

Exercice 9 corrigé disponible

Résoudre l'équation trigonométrique $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x\in[-\pi\,;3\pi]$

Exercice 10 corrigé disponible

Résoudre l'équation $\cos 4x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 11 corrigé disponible

Soit x un réel de l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. M est le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ associé à x.

1. Placer le point M tel que $\sin x=\dfrac{2}{5}$.
2. Placer les points A, B, C et D du cercle associés aux réels $\dfrac{\pi}{2}+x$, $\dfrac{\pi}{2}-x$, $\pi+x$ et $\pi-x$.
3. Calculer $\cos x$.
4. Donner les valeurs de :

   (a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$; (b) $\sin(\pi-x)$; (c) $\cos(\pi+x)$.

Exercice 12 corrigé disponible

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. Sur $[0;3\pi[$: $\cos x=\dfrac{1}{2}$
2. Sur $]-\pi;\pi]$: $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. Sur $[0;4\pi[$: $\cos x=\cos\dfrac{2\pi}{3}$
4. Sur $[0;2\pi[$: $\cos^2 x=\dfrac{3}{4}$
5. Sur $]-\pi;\pi]$: $6-12\cos x>0$
6. Sur $]-\pi;2\pi]$: $\sin x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
7. Sur $]-\pi;\pi]$: $2\sin^2 x-\sin x-1=0$
8. Sur $]-\pi;\pi]$: $\sin 2x=\sin\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 13 corrigé disponible

1. Résoudre dans $[0;2\pi[$:

   (a) $\cos x=\cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)$; (b) $\sin x=\sin\dfrac{2\pi}{3}$

2. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$:

   (a) $\cos x=\cos\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right)$; (b) $\sin x=\sin\dfrac{4\pi}{3}$

Exercice 14 corrigé disponible

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous puis déterminer leurs solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$:

   $a)$ $\cos s=\dfrac{1}{2}$ $b)$ $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2\cos^2 x+\sqrt{3}\,\cos x-3=0$

Exercice 15 corrigé disponible

Les fonctions suivantes sont-elles paires, impaires ou ni l'un ni l'autre ?

1. $f_1(x)=\sin(3x)$.
2. $f_2(x)=-2\cos(x)$.
3. $f_3(x)=7x\sin(4x)$.
4. $f_4(x)=3\cos(x)+1$.

Exercice 16 corrigé disponible

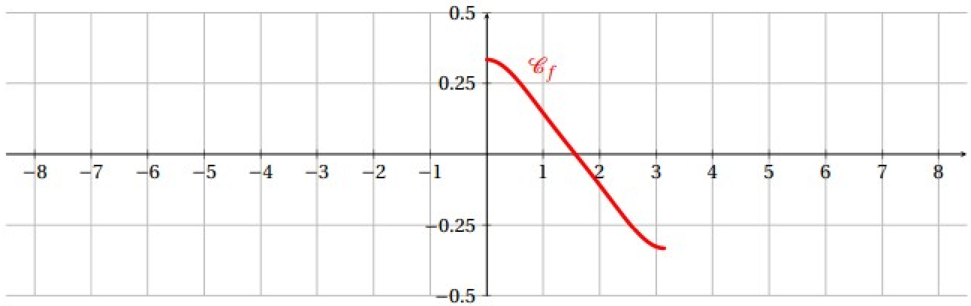
Montrer que les fonctions suivantes sont 2π-périodiques.

1. $f_1(x)=\sin(x)+1$.
2. $f_2(x)=-2\cos(x)+1$.
3. $f_3(x)=\sin^2(x)+1$.
4. $f_4(x)=\cos^2(x)+2\sin(x)+1$.

Exercice 17 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{3+\sin^2(x)}$.

1. Montrer que f est paire. Interpréter graphiquement.
2. Montrer que f est périodique de période 2π. Interpréter graphiquement.
3. En déduire le plus petit intervalle I possible pour étudier f.
4. Ci-dessous, on donne $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f sur I. Compléter sa représentation graphique sur $\mathbb{R}$.



Exercice 18 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-3 \leq f(x) \leq 3$
2) Déterminer la parité de la fonction f
3) Montrer que pour tout $\in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = f(x)$. En déduire que f est périodique et préciser sa période.

Exercice 19 corrigé disponible

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ où x désigne un réel.

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal où 3 cm représente π sur l'axe des abscisses et 2cm représente une unité sur l'axe des ordonnées.

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que, pour tout réel x, le dénominateur $2+\cos x$ ne s'annule jamais.
2. **a.** Démontrer que f est périodique de période 2π.

   b. Démontrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

   c. A l'aide des deux questions précédentes démontrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0\,;\,\pi]$.