# Fonctions trigonométriques – Corrigés disponibles

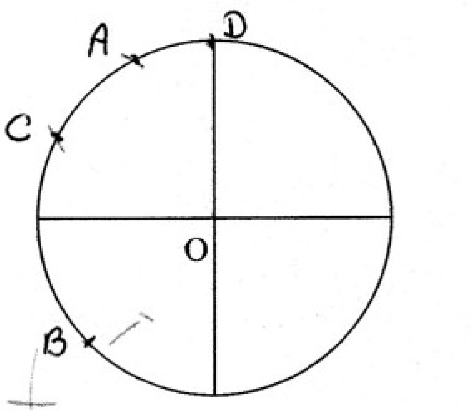
## Exercice 1

1. Le point A est associé au réel $\dfrac{2\pi}{3}$

Le point B est associé au réel $-\dfrac{3\pi}{4}$

Le point C est associé au réel $\dfrac{17\pi}{6}$

Le point D est associé au réel $\dfrac{5\pi}{2}$

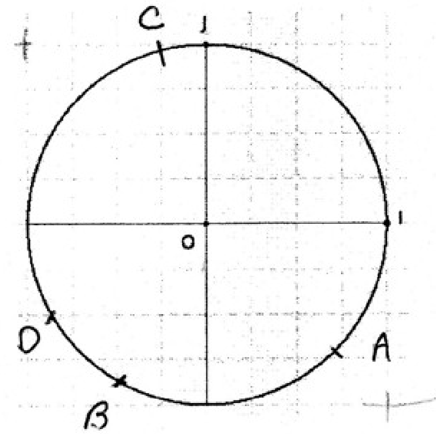



2. Le point A est associé au réel $\dfrac{23\pi}{4}$ ou $-\dfrac{\pi}{4}$ en mesure principale

Le point B est associé au réel $-\dfrac{20\pi}{3}$ ou $-\dfrac{2\pi}{3}$ en mesure principale

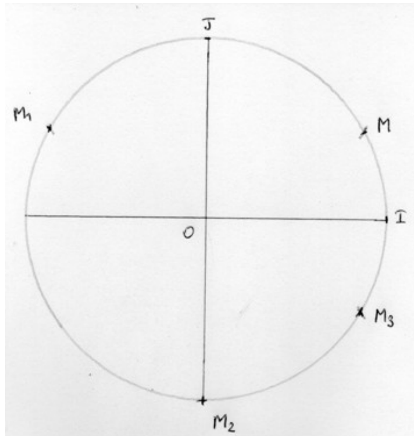
Le point C est associé au réel $\dfrac{37\pi}{8}$ ou $\dfrac{5\pi}{8}$ en mesure principale

Le point D est associé au réel $\dfrac{-41\pi}{6}$ ou $-\dfrac{5\pi}{6}$ en mesure principale




## Exercice 2

1. et 2.




3. $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ; $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

Par lecture sur le cercle trigonométrique :

$$\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2} \quad ; \quad \cos\frac{9\pi}{6}=0 \quad ; \quad \sin\frac{9\pi}{6}=-1$$

$$\cos-\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin-\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

## Exercice 3

Par propriétés des angles associés

1.a. $A=\sin(x+\pi)+\cos(x+\frac{\pi}{2})+\sin x-\sin(-x)$

$A=-\sin x-\sin x+\sin x+\sin x=0$

1.b. $B=\cos x-\cos(x-\frac{\pi}{2})-\sin(x-\pi)+\cos(\pi-x)$

$B=\cos x-\sin x+\sin x-\cos x=0$

2.a. $C=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{9\pi}{14}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{23\pi}{14}$

$C=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{9\pi}{14}+\cos(\pi+\frac{\pi}{7})+\cos(\pi+\frac{9\pi}{14})=0$

2.b. $D=\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{4\pi}{5}-\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{11\pi}{5}$

$D=\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{6\pi}{5}+\sin(\pi+\frac{6\pi}{5})=0$

## Exercice 4

1. Sur $[0;3\pi]$ $\quad \cos x=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

<u>cas 1</u> : $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$ ; si $k=1$ alors $x=\frac{4\pi}{3}$

<u>cas 2</u> : $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$ ; $k=0$ alors $x=\frac{2\pi}{3}$

$k=1$ alors $x=\frac{8\pi}{3}$

$S=\left\{\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right\}$

2. Sur $]-\pi;\pi]$ $\quad \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

<u>cas 1</u> : $x=-\frac{\pi}{3}$ <u>cas 2</u> : $x=-\frac{2\pi}{3}$

$S=\left\{-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right\}$

3. Sur $[0;4\pi[$ $\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

<u>cas 1</u> : $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{5}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

si $k=1$ alors $x=\frac{39\pi}{20}$ ; si $k=2$ alors $x=\frac{79\pi}{20}$

<u>cas 2</u> : $x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{5}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

si $k=1$ alors $x=\frac{31\pi}{20}$ ; si $k=2$ alors $x=\frac{71\pi}{20}$

$S=\left\{\frac{31\pi}{20};\frac{39\pi}{20};\frac{71\pi}{20};\frac{79\pi}{20}\right\}$

4. Sur $]-\pi;\pi]$ $\quad \sin 2x=\sin\frac{\pi}{4}$

<u>cas 1</u> : $2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

si $k=-1$ alors $x=-\frac{7\pi}{8}$ ; si $k=0$ alors $x=\frac{\pi}{8}$

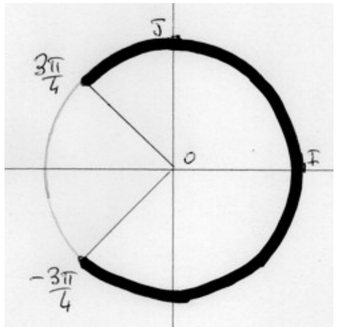
<u>cas 2</u> : $2x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

si $k=-1$ alors $x=-\frac{5\pi}{8}$ ; si $k=0$ alors $x=\frac{3\pi}{8}$

$S=\left\{-\frac{7\pi}{8};-\frac{5\pi}{8};\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right\}$

5. Sur $\left]-\pi\,;\pi\right]$ $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

on résout $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; $x = -\frac{3\pi}{4}$ ; $x = \frac{3\pi}{4}$

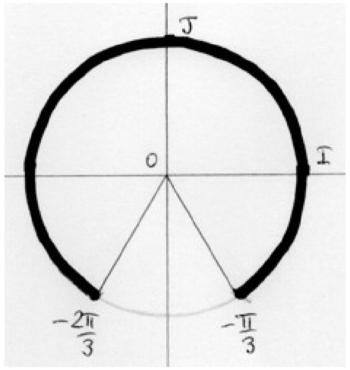



Par lecture graphique sur le cercle trigonométrique :

$$S = \left]-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right[$$

6. Sur $\left]-\pi\,;2\pi\right]$ $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

on résout $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $x = -\frac{2\pi}{3}$ ; $x = \frac{2\pi}{3}$




Par lecture graphique sur le cercle trigonométrique :

$$S = \left]-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3}\,;\frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}\,;2\pi\right]$$

7. Sur $[0\,;2\pi]$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ ; $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S = \left\{\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\,;\frac{7\pi}{4}\right\}$$

8. Sur $\left]-\pi\,;\pi\right]$ $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

On pose $X = \cos x$ avec $-1 \leq X \leq 1$ ; on résout $2X^2 + X - 1 = 0$

$X = -1$ ou $X = \frac{1}{2}$

<u>cas 1</u> : $X = -1$ ; $x = \pi$

<u>cas 2</u> : $X = \frac{1}{2}$ ; $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$

$$S = \left\{-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\,;\pi\right\}$$

## Exercice 5

Par propriétés des angles associés

1. $A = \cos(x-\pi) - \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$

$A = -\cos x - \sin x - \cos x + \sin x = -2\cos x$

2. $B = \sin x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$B = \sin x - \sin x + \cos x - \cos x = 0$

3. $C = \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{11\pi}{8} + \sin\frac{13\pi}{8}$

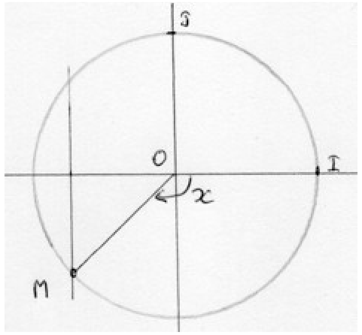
$C = \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\pi + \frac{5\pi}{8}\right) = 0$

4. $D = \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{9\pi}{10}$

$D = \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi - \frac{9\pi}{10}\right) = 0$

## Exercice 6

1.




2. $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ; $\sin x<0$ ; $\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

3.a. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x=\frac{\sqrt{7}}{4}$

3.b. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x=-\frac{3}{4}$

3.c. $\cos(\pi+x)=-\cos x=\frac{3}{4}$

3.d. $\sin(\pi-x)=\sin x=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

## Exercice 7

$\cos(-x)=\cos x$ ; $\cos(\pi-x)=-\cos x$ ; $\cos(\pi+x)=\cos x$

$\sin(-x)=-\sin x$ ; $\sin(\pi-x)=\sin x$ ; $\sin(\pi+x)=-\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ ; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ ; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

## Exercice 8

1. $x\in[0;\pi]$ ; $\sin x>0$ ; $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2. $\cos x>0$ avec $x\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin x>0$ avec $x\in[0;\pi]$

$x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ; donc $x=\frac{\pi}{5}$

## Exercice 9

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x\in[-\pi;3\pi]$ ; $\sin x=\sin\frac{\pi}{3}$

<u>cas 1</u> : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$ ; $x=\frac{\pi}{3}$ ou $x=\frac{7\pi}{3}$

<u>cas 2</u> : $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$ ; $x=\frac{2\pi}{3}$ ou $x=\frac{8\pi}{3}$

$$S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right\}$$

## Exercice 10

$\cos 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

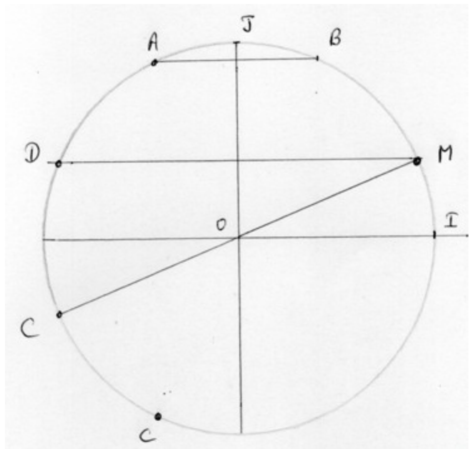
<u>cas 1</u> : $4x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ; $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$

<u>cas 2</u> : $4x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi$ ; $x=\frac{-\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$

$$S=\left\{-\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\quad avec\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

## Exercice 11

1. et 2.



3. $\cos x = +\sqrt{1-\sin^2 x}$ ; $\cos x = +\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

4.a. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x = -\frac{2}{5}$ 4.b. $\sin(\pi - x) = -\sin x = -\frac{2}{5}$

4.c. $\cos(\pi + x) = -\cos x = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

## Exercice 12

1. Sur $[0;3\pi[$ $\cos x = \frac{1}{2}$ $S = \left\{\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right\}$
2. Sur $]-\pi;\pi]$ $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \left\{-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right\}$
3. Sur $[0;4\pi[$ $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$ $S = \left\{\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3};\frac{8\pi}{3};\frac{10\pi}{3}\right\}$
4. Sur $[0;2\pi[$ $\cos^2 x = \frac{3}{4}$ $S = \left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$
5. Sur $]-\pi;\pi[$ $6-12 cosx > 0$ $S = \left]-\pi;-\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3};\pi\right]$
6. Sur $]-\pi;2\pi]$ $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ $S = \left]-\pi;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3};2\pi\right]$
7. Sur $]-\pi;\pi]$ $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ $S = \left\{\frac{-5\pi}{6};-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\}$
8. Sur $]-\pi;\pi]$ $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{4}$ $S = \left\{-\frac{7\pi}{8};-\frac{5\pi}{8};\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right\}$

## Exercice 13

1.a. Sur $[0;2\pi[$ $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $S = \left\{\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$

1.b. Sur $[0;2\pi[$ $\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $S = \left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

2.a. Sur $]-\pi;\pi]$ $\cos x = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ $S = \left\{-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

2.b. Sur $]-\pi;\pi]$ $\sin x = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ $S = \left\{-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right\}$

## Exercice 14

1.a. Sur $]-\pi;\pi]$ $\cos s = \frac{1}{2}$ $S = \left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

1.b. Sur $]-\pi;\pi]$ $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

$S = \left\{-\frac{17\pi}{18};-\frac{5\pi}{18};\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{18}\right\}$

2. Sur $\mathbb{R}$ $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 3 = 0$ ; on pose $X = \cos x$ avec $-1 \leq X \leq 1$

$X = -\sqrt{3}$ ou $X = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Nous résolvons le cas $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ car $\cos x \neq -\sqrt{3}$

$S = \left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}\right\}$

## Exercice 15

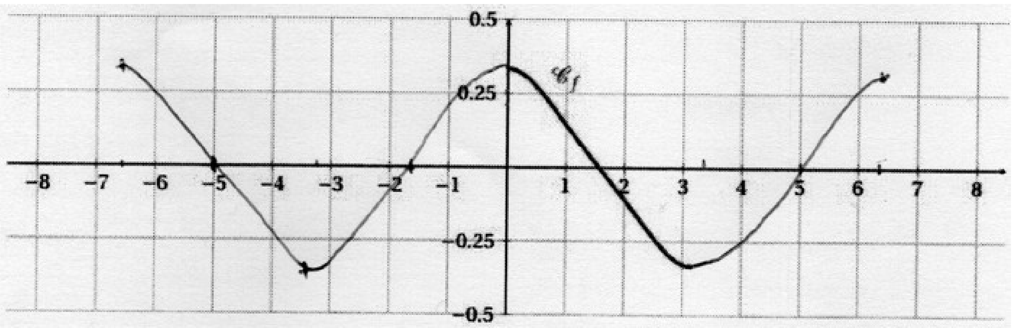
1. $f_1(x) = \sin(3x)$ ; $f_1(-x) = \sin(-3x) = -\sin(3x)$
   $f_1(-x) = -f_1(x)$ fonction impaire
2. $f_2(x) = -2\cos(x)$ ; $f_2(-x) = -2\cos(-x) = -2\cos x$
   $f_2(-x) = f_2(x)$ fonction paire
3. $f_3(x) = 7x\cdot\sin(4x)$ ; $f_3(-x) = (7(-x))\cdot\sin(-4x) = 7x\cdot\sin(4x)$
   $f_3(-x) = f_3(x)$ fonction paire
4. $f_4(x) = 3\cos x + 1 = f_4(-x)$ ; $f_4(-x) = 3\cos(-x)+1$
   $f_4(-x) = f_4(x)$ fonction paire

## Exercice 16

1. $f_1(x)=\sin(x)+1$ ; $f_1(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+1=\sin x+1=f_1(x)$
Donc $f_1(x)$ est $2\pi$ - périodique
2. $f_2(x)=-2\cos x+1$
$f_2(x+2\pi)=-2\cos(x+2\pi)+1=-2\cos x+1=f_2(x)$
Donc $f_2(x)$ est $2\pi$ - périodique
3. $f_3(x)=\sin^2 x+1$ ; $f_3(x+2\pi)=\sin^2(x+2\pi)+1=\sin^2 x+1=f_3(x)$
Donc $f_3(x)$ est $2\pi$ - périodique
4. $f_4(x)=\cos^2 x+2\sin x+1$ ;
$f_4(x+2\pi)=\cos^2(x+2\pi)+2\sin(x+2\pi)+1$
$f_4(x+2\pi)=f_4(x)$ donc $f_4(x)$ est $2\pi$ - périodique

## Exercice 17

1. $f(x)=\dfrac{\cos x}{3+\sin^2 x}$ ; $f(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{3+\sin^2(-2x)}=f(x)$ ; f est paire ; la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
2. $f(x+2\pi)=\dfrac{\cos(x+2\pi)}{3+\sin^2(x+2\pi)}=\dfrac{\cos x}{3+\sin^2 x}=f(x)$ ; il est possible de déduire la courbe sur $\mathbb{R}$ par translation de la représentation sur $T=2\pi$
3. Il est possible d'étudier f(x) sur $[0;\pi]$ car f(x) est paire et $2\pi$ - périodique
4.




## Exercice 18

$f(x)=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

1. On pose $X=2x+\frac{\pi}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $X=2x+\frac{\pi}{2}$ | $-\infty$ | $\nearrow +\infty$ |

$X\in\mathbb{R}$

si $X\in\mathbb{R}$ alors $-1\leq\cos X\leq 1$

$-3\leq 3\cos X\leq 3$ car $3>0$
Conserve l'ordre de l'inégalité

$-3\leq 3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\leq 3$ $\forall x\in\mathbb{R}$

2. $f(-x)=3\cos\left(-2x+\frac{\pi}{2}\right)$

$f(x)=-3\sin(2x)$
$=3\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-2x)\right)$
$=3\sin(-2x)$

$f(-x)=3\sin 2x=-f(x)$
f est impaire ; la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère

3. $f(x+\pi)=3\cos\left(2(x+\pi)+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}+2\pi\right)$
$=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ car $\cos x$ $2\pi$-périodique

f est $\pi$-périodique

## Exercice 19

1. On a $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$

   $2+\cos(x)\neq 0$ car $-1\leq\cos(x)\leq 1$ $1\leq 2+\cos(x)\leq 3$ $0\notin[1;3]$

   Comme le dénominateur ne s'annule pas alors f est définie sur $\mathbb{R}$

2. a. $f(x+2\pi)=\dfrac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)}=\dfrac{\sin x}{2+\cos(2x)}=f(x)$

   La fonction f est $2\pi$ - périodique

   b. $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=-\dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}=-f(x)$

   car $\sin x$ est impair $\cos x$ est pair

   La courbe *C* est symétrique par rapport à l'origine du repère

   c. *f* est impaire, on peut restreindre l'étude de la fonction sur son demi domaine de définition soit sur $I=[0;+\infty[$

   *f* est 2π-périodique, on peut restreindre l'étude de la fonction sur une période $J=[-\pi;\pi]$

   L'étude de la fonction *f* peut être réduit à $I\cap J=[0;\pi]$