**Exercice 1** ✯ Démontrer par récurrence la propriété suivante : $(e^{nx})' = ne^{(n-1)x}, \forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$

**Exercice 2** ✯ On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que $u_n \leqslant 3$.

**Exercice 3** ✯ On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que $u_n = 3 \times 2^n + 4$.

**Exercice 4** ✯ On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5x+1)^n \text{ où } n \geqslant 1$$

Démontrer par récurrence que $f'(x) = 5n(5x+1)^{n-1}$

**Exercice 5** ✯ On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

On veut démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$.
On considère la fonction $f$ définie sur $[1;+\infty[$ par :$f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$

❶ Déterminer la dérivée $f'$ de $f$ et déterminer son signe sur $[1;+\infty[$.

❷ En déduire les variations de $f$ sur $[1;+\infty[$.

❸ En déduire que si $x \geqslant 1$ alors $f(x) \geqslant 1$.

❹ En utilisant les résultats précédents, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 1$.

**Exercice 6** ✯ On considère un entier strictement positif $a$ et la suite $(u_n)$ définie pour tout $n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que $u_n > 0$.

**Exercice 7** ✯ On considère un entier strictement positif $a$ et la suite $(u_n)$ définie pour tout $n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = 27u_n - 50 \end{cases}$$

❶ Rappeler les variations de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 27x - 50$

❷ Démontrer par récurrence que $u_n < u_{n+1}$ pour $n \geqslant 0$.

**Exercice 8** ✯ ✯ On considère un entier strictement positif $a$ et la suite $(u_n)$ définie pour tout $n > 0$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

**Exercice 9** ✯✯✯

Démontrer par récurrence :$(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ quelque soit $x$ et $y$.