Applications de la dérivation – Corrigés disponibles

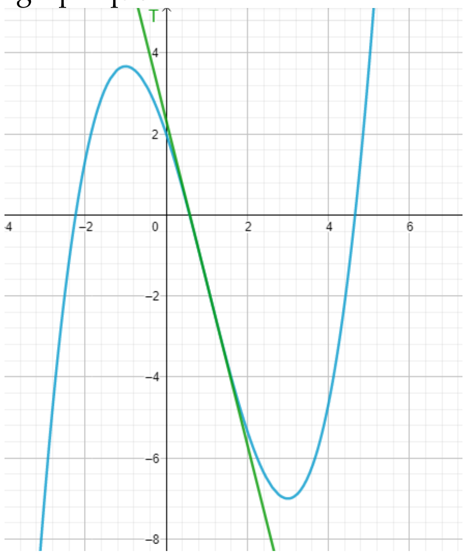
Exercice 1

1. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme ; $f'(x)=x^2-2x-3$; $f'(x)=0$ pour $x=-1$ ou $x=3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{11}{3}$	↘	-7	↗	

2. $T_1 : y=-4x+\frac{7}{3}$

3. Représentation graphique



Exercice 2

1. Etude du signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Par lecture graphique, le nombre dérivé est égale au coefficient directeur de la tangente au point de la courbe considéré
$f'(-1)=0$; $f'(1)=0$; $f'(2)=3$; $f'(3)=0$
3. $T : y=3(x-2)=3x-6$
4. En tenant compte des valeurs de la question 2. il s'agit de la courbe 3

Exercice 3

1. $f(x)$ est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ comme quotient et somme

$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=2x$ et $v(x)=x^2+9$; $u'(x)=2$ et $v'(x)=2x$

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}=\frac{18-2x^2}{(x^2+9)^2}=\frac{2(3+x)(3-x)}{(x^2+9)^2}$$

2. Tableau de variations de $f(x)$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x^2+9)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{3}$	↗	$\frac{1}{3}$	↘	

Exercice 4

1. $S(r)=2\pi r^2+2\pi rh$ avec $V=10=\pi r^2 h$ et $r\in]0;+\infty[$

$h=\frac{10}{\pi r^2}$ soit $S(r)=2\pi r^2+\frac{20}{r}$

2.a. $S(r)$ est définie pour $r\in]0;+\infty[$

2.b. $S(r)$ est dérivable sur c $r\in]0;+\infty[$ omme somme et quotient

$S'(r)=4\pi r-\frac{20}{r^2}$; $S'(r)=0$ pour $r=\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\approx 1{,}17\,dm$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(r)$	||	$-$	0	$+$	
$S(r)$	||	$\searrow$		$\nearrow$	

3. La boite doit avoir pour dimensions :

$$r=\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\approx 1{,}17\,dm \quad \text{et} \quad h=\frac{10}{\pi\left(\frac{5}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}\approx 2{,}34\,dm$$

Exercice 5

1. $f(x)=2x+1-\frac{2}{x-3}$; $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$f'(x)=2+\frac{2}{(x-3)^2}>0$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	||	$\nearrow$	

2. $f(x)=\frac{2x^2+8x+2}{x^2+2x+1}$; $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f'(x)=\frac{4-4x}{(x+1)^3}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$4-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)^3$		$-$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	||	$\nearrow$	3	$\searrow$	

3. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$; $f(x)$ est définie sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

$f'(x)=\frac{-1}{(2x-3)^{\frac{3}{2}}}<0$

x	$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
$f(x)$	||	$\searrow$	

Exercice 6

1. $B(x)=R(x)-C(x)=450x-(x^3-60x^2+975x)=-x^3+60x^2-525x$ pour $x\in[0;45]$

2. $B(x)$ est définie et dérivable sur $[0;45]$ comme polynôme

$B'(x)=-3x^2+120x-525$

x	0		5		35		45
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	$\searrow$	-1250	$\nearrow$	12250	$\searrow$	6750

3. Le bénéfice est maximal est pour $x=35\,kg$ de truffes
4. Le bénéfice maximal vaut $12250\,€$