Exercices
- 1 à 4 (ci-contre)
- 20 à 36

1 Vecteurs de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur vue en géométrie plane.

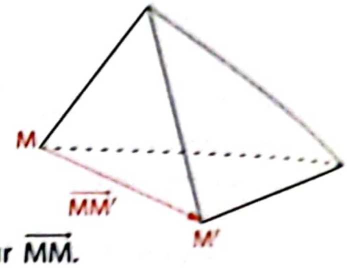
A Translations et vecteurs

Définitions

M et M′ sont deux points distincts de l'espace.

La translation qui transforme M en M′ est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour **direction** celle de la droite (MM′), pour **sens** celui de M vers M′ et pour **norme** la longueur MM′.



La translation qui transforme le point M en lui-même est la translation de vecteur $\overrightarrow{MM}$.
Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est appelé **vecteur nul** ; on le note $\vec{0}$, ainsi $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

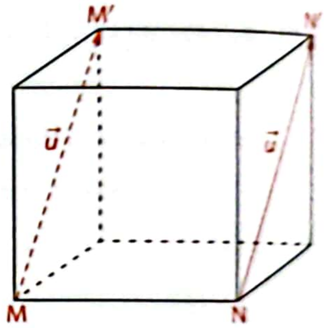
Égalité de deux vecteurs

- Lorsque la translation qui transforme M en M′ transforme également N en N′, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux.

Dans ce cas $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont les représentants d'un même vecteur $\vec{u}$ et on note :

$$\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}.$$

- $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ si, et seulement si, le quadrilatère MM′N′N est un parallélogramme (éventuellement aplati).

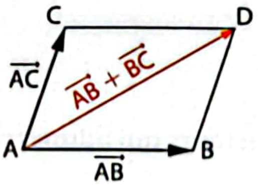


B Opérations sur les vecteurs, combinaisons linéaires

- **Somme de deux vecteurs :** A, B et C sont des points de l'espace.

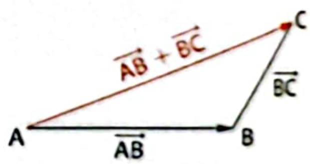
Règle du parallélogramme

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le point tel que ABDC est un parallélogramme.



Relation de Chasles

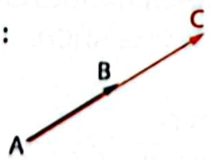
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



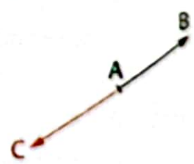
- **Produit d'un vecteur par un nombre réel :** A, B sont des points distincts de l'espace et λ un nombre réel.

Le vecteur $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- si $\lambda \geqslant 0$
  $C \in [AB)$ et $AC = \lambda AB$



- si $\lambda < 0$
  $C \in (AB)$, $C \notin [AB)$ et $AC = \lambda AB$



Propriétés (admises)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent des vecteurs de l'espace, λ et λ' désignent des nombres réels.

- $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.
- $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ et le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$ est noté $\vec{u} - \vec{v}$
- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ $\quad (\lambda + \lambda')\vec{u} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}$ $\quad \lambda(\lambda'\vec{u}) = (\lambda\lambda')\vec{u}$

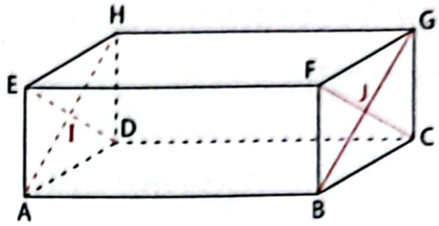
Définition

Dire qu'un vecteur $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ signifie qu'il existe des réels x, y et z tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} + z\vec{t}$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Prouver des égalités de vecteurs

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I et J sont les centres respectifs des faces ADHE et BCGF.



a) Déterminer trois vecteurs de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{FG}$.

b) Quelle est l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{FJ}$?

c) Compléter l'égalité suivante $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{E\ldots}$.

Solution

a) Les faces du parallélépipède rectangle sont des rectangles, donc $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$.
On a aussi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{FG}$.

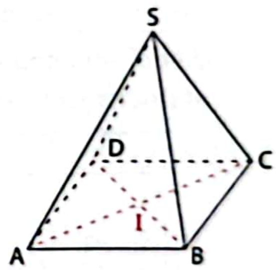
b) $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$, or $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FC}$ donc $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$, soit $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{FJ}$.
Ainsi, D est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{FJ}$.

> **b)** Pour trouver l'image de I, on cherche le point qui vérifie $\overrightarrow{I\ldots} = \overrightarrow{FJ}$.

c) $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$
D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC}$ donc $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EC}$.

2 Décomposer un vecteur

SABCD est une pyramide de sommet S dont la base est le parallélogramme ABCD de centre I.



a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{SI}$.

b) En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{SI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BS}$.

Solution

a) D'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}$
I étant le milieu de [BD], les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont opposés, donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Ainsi $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SI}$.

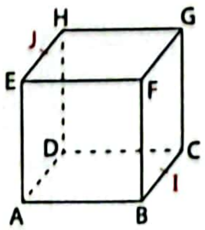
> La relation de Chasles et la règle du parallélogramme permettent de faire apparaître les vecteurs utiles pour décomposer.

b) D'après **a)** : $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}$. Or, $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Ainsi, $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BS}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I et J sont les milieux respectifs des segments [BC] et [EH].

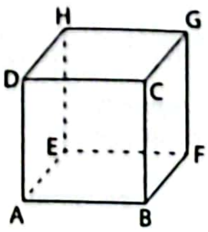


a) Quelle est l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{HJ}$?

b) Compléter l'égalité : $\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{H\ldots}$

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Exprimer chacun des vecteurs comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$.



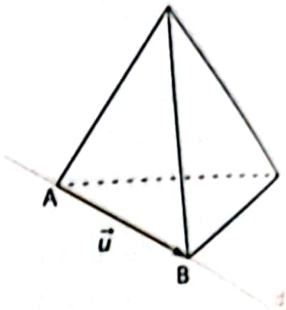
a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$ **b)** $\overrightarrow{DF}$

c) $\overrightarrow{HB}$ **d)** $\overrightarrow{GA}$

Exercices
- 5 à 8 (ci-contre)
- 37 à 46

2 Droites de l'espace

A Vecteurs directeurs d'une droite, vecteurs colinéaires



Définition

Dire qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite d signifie qu'il existe deux points distincts A et B de la droite d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Remarque : si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d, alors tout vecteur $k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est aussi un vecteur directeur de la droite d.

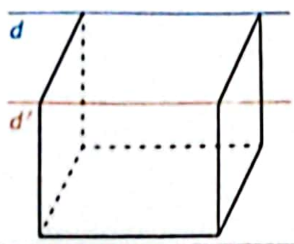
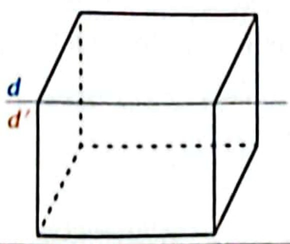
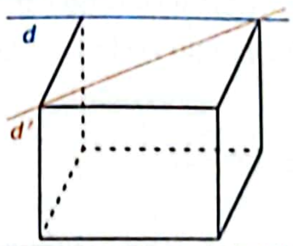
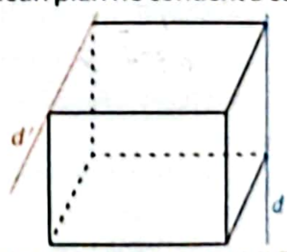
Définitions

- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont colinéaires** signifie qu'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Vidéo JAICOMPRIS.COM Cette notion est présentée en vidéo

B Positions relatives de deux droites de l'espace

d et d' sont deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.		$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires.	
d et d' sont coplanaires et strictement parallèles.	d et d' sont coplanaires et confondues.	d et d' sont coplanaires et sécantes.	d et d' sont non coplanaires, aucun plan ne contient d et d'.
			

C Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur

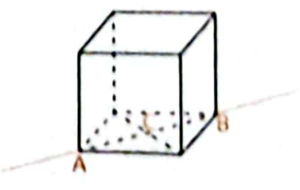
Propriété

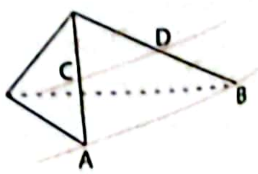
d est la droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un point M **appartient à la droite** d si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$.

D Alignement et parallélisme

Propriétés

- Trois points **A, B et C** de l'espace sont **alignés** si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC}$ **sont colinéaires.**
- Des droites (AB) et (CD) **sont parallèles** si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{CD}$ **sont colinéaires.**

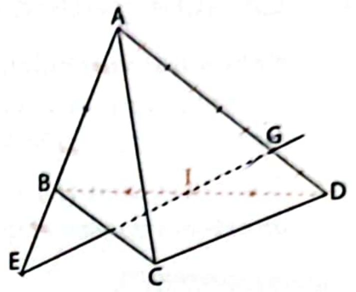




EXERCICES RÉSOLUS

5 Démontrer l'alignement de trois points

ABCD est un tétraèdre de l'espace. I est le milieu de l'arête [BD], G est le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.



a) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire que les points I, G et E sont alignés.

Solution

a) Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DI}$; or, $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$,

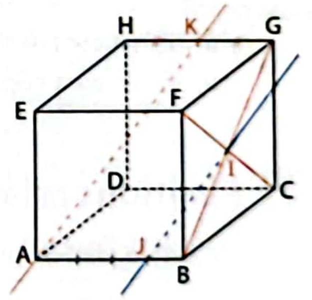
donc $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) D'après **a)**, $\overrightarrow{GE} = 3\overrightarrow{GI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires donc les points I, G et E sont alignés.

On obtient la relation de colinéarité à partir des décompositions des vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

6 Démontrer le parallélisme de deux droites

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I est le centre de la face BCGF, K est le milieu de [HG] et J le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.



a) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

b) En déduire que les droites (AK) et (IJ) sont parallèles.

Solution

a) Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}$; or, $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, donc

$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

b) D'après **a)**, $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires donc les droites (AK) et (IJ) sont parallèles.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 ABCD est un tétraèdre.
J est le milieu de [BC], H et F sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

a) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points F, H et J sont alignés.

Vidéo

JAICOMPRIS.COM Cet exercice est corrigé en vidéo

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [CD], J celui de [AI]. M et H sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}.$$

a) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire que les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

Cours

Exercices
- 9 à 12 (ci-contre)
- 47 à 59

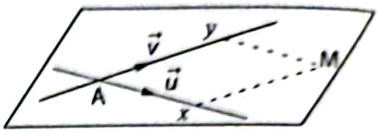
3 Plans de l'espace

A Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et une direction

Notation et vocabulaire

Un plan de l'espace peut être défini par la donnée de deux droites **sécantes**, c'est-à-dire d'un point A et de deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note ce plan $(\mathbf{A}\,;\vec{u},\vec{v})$, on dit que $(\vec{u},\vec{v})$ est un **couple de vecteurs directeurs** du plan et qu'il définit sa **direction**.



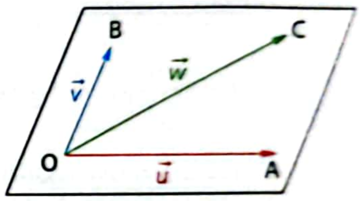
Propriété (admise)

$\mathcal{P}$ est le plan $(\mathrm{A}\,;\vec{u},\vec{v})$.
Un point M appartient au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{\mathbf{AM}} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

B Vecteurs coplanaires

Définition

Dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** signifie que pour un point O quelconque de l'espace, les points O, A, B et C où $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{v}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{w}$ appartiennent à un même plan.



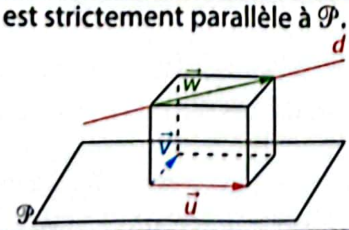
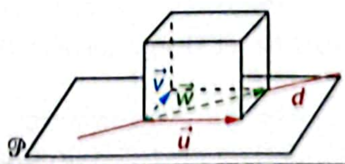
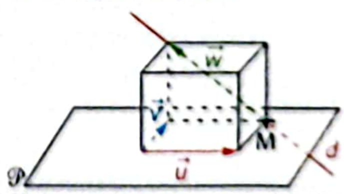
Propriété

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, et seulement si, il existe des réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

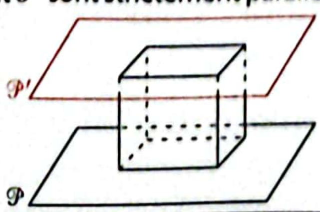
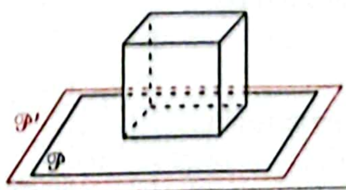
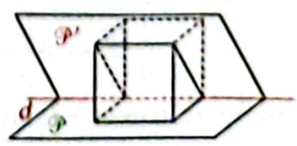
C Positions relatives de droites et plans de l'espace

Vidéo JAICOMPRIS.COM

- $\mathcal{P}$ est un plan de direction $(\vec{u},\vec{v})$ et d est une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires : d et $\mathcal{P}$ sont parallèles.		$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.	d est contenue dans $\mathcal{P}$.	d et $\mathcal{P}$ sont sécants en M.
		

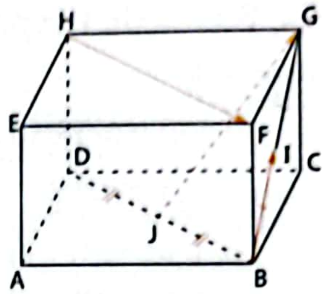
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont même direction : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.		$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ n'ont pas la même direction.
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles.	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite d.
		

EXERCICES RÉSOLUS

9 Démontrer que des vecteurs sont coplanaires

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I est le milieu du segment [BG] et J est le milieu du segment [DB].
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont coplanaires.



Solution

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BG}$.

BDHF est un rectangle et J est le milieu de [DB] donc $\overrightarrow{JB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF}$.

I est le milieu de [BG] donc $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BI}$.

Alors $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + 2\overrightarrow{BI}$ et les vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont coplanaires (les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont non colinéaires).

Pour démontrer que trois vecteurs sont coplanaires, on exprime l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.

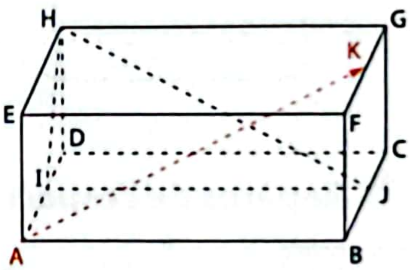
10 Démontrer qu'une droite et un plan sont parallèles

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AD], [BC] et [FG].

a) Démontrer que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IG}$.

b) En déduire l'écriture de $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IH}$.

c) En déduire que la droite (AK) est parallèle au plan (IJH).



Solution

a) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IK}$.

Or $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{KG}$, donc $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{IG}$.

b) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HG}$; or, $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{IJ}$ donc $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IJ}$

c) $(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IJ})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (IJH).

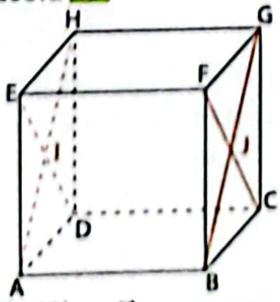
D'après **b)**, $\overrightarrow{IH}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont coplanaires donc la droite (AK) est parallèle au plan (IJH).

Pour démontrer que la droite (AK) est parallèle au plan (IJH), on montre que $\overrightarrow{AK}$ est une combinaison linéaire des vecteurs non colinéaires de (IJH).

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I et J sont les centres respectifs des faces ADHE et BCGF.



Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 ABCD est un tétraèdre. G est le point tel que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$ où I est le milieu de [BC].

E et F sont tels que $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

a) Réaliser une figure.

b) Décomposer $\overrightarrow{EF}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

c) En déduire que la droite (EF) est parallèle au plan (BCD).

Cours

Exercices
- 13 à 16 (ci-contre)
- 60 à 80

Vidéo
JaiCompris.com
Cette notion est présentée en vidéo

4 Bases et repères de l'espace

A Bases de l'espace

Définition

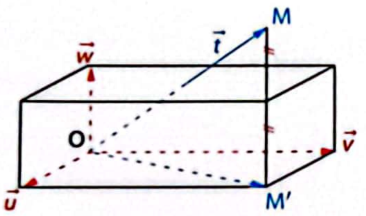
Une **base** de l'espace est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ formé de vecteurs **non coplanaires**.

Propriété – Définition

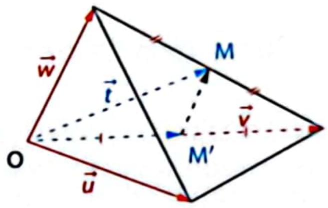
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe **un unique** triplet $(a\,;b\,;c)$ de nombres réels tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.
$(a\,;b\,;c)$ est le triplet des **coordonnées** du vecteur $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Remarque : cette propriété est démontrée à l'exercice 84 p. 101.

Exemples



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$
$\overrightarrow{OM} = \vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$
$\vec{t}$ a pour coordonnées $(1\,;1\,;2)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$
$\vec{t}\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

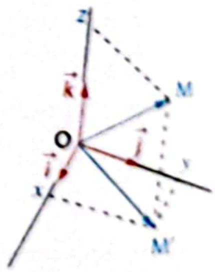
B Repères de l'espace

Définition

Un **repère** de l'espace, noté $(\mathrm{O}\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, est formé d'un point O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs de l'espace.

Propriété

$(\mathrm{O}\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace. Pour tout point M, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
$(x\,;y\,;z)$ est le triplet de **coordonnées** du point M dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, x est l'**abscisse** de M, y est son **ordonnée** et z est sa **cote**.



Remarque : cette propriété découle directement de la propriété du § A.

C Calculs sur les coordonnées

Propriétés

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors :
  – le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'\,;y + y'\,;z + z')$;
  – pour tout réel λ, le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x\,;\lambda y\,;\lambda z)$.
- Si A et B ont pour coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $(x_B\,;y_B\,;z_B)$ dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, alors :
  – le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
  – le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\frac{y_A + y_B}{2}\,;\frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

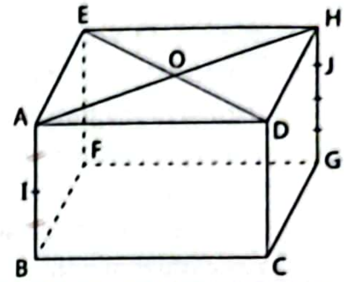
EXERCICES RÉSOLUS

13 Décomposer un vecteur dans une base

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
On note I le milieu de [AB], O le centre de la face ADHE et J le point défini par $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

a) Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

b) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ dans cette base.



Solution

a) Le point E n'appartient pas au plan (ABD) donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

Les décompositions peuvent être lues sur la figure.

b) $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; or, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GJ}$; or, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{GH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

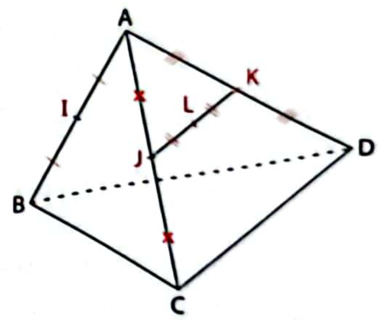
donc $\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

14 Calculer des coordonnées

ABCD est un tétraèdre. I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC] et [AD]. L est le milieu du segment [JK].

a) Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

b) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires.



Solution

a) • $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$; • $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $J\left(0 ; \frac{1}{2} ; 0\right)$;

• $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $K\left(0 ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$;

• L est le milieu de [JK] donc $L\left(0 ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$.

b) On obtient $\overrightarrow{IL}\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$, $\overrightarrow{BC}(-1 ; 1 ; 0)$ et $\overrightarrow{CD}(0 ; -1 ; 1)$ donc $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ et les vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires.

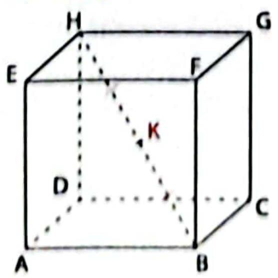
EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

15 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
K est le milieu de [HB].

a) Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

b) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{KD}$ dans cette base.



Sur le modèle de l'exercice résolu 14

16 ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [BC], J celui de [ID]. K est le point défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}$.

a) Réaliser une figure.

b) Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils coplanaires ?