Contrôle de mathématiques

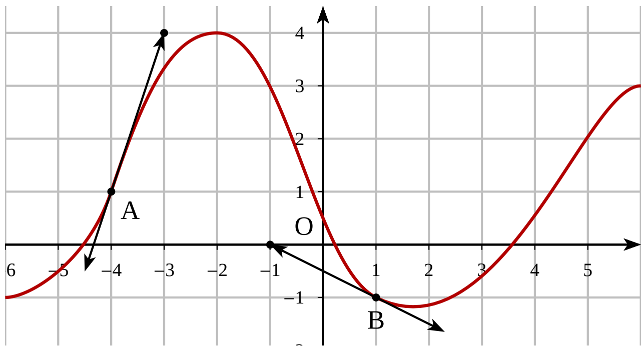
Lundi 29 janvier 2024

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour les question 1) et 2) on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dont on a représenté les tangentes en A et B.



1) On a alors :

a) $f'(-4) = -3$ b) $f'(-4) = \dfrac{1}{3}$ c) $f'(-4) = 3$ d) $f'(-4) = 4$

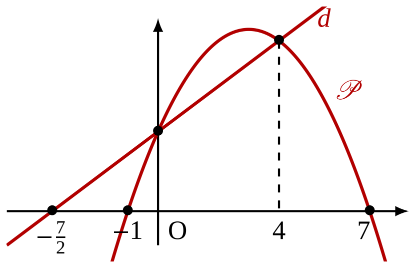
2) L'équation de la tangente en B est :

a) $y = -2x - 1$ b) $y = -2x - \dfrac{1}{2}$ c) $y = -\dfrac{1}{2}x - 1$ d) $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

Pour les question 3) et 4) on a représenté

- la droite $d : y = mx + p$
- et la parabole $\mathscr{P} : y = ax^2 + bx + c$.

Soit la fonction f telle que : $f(x) = \dfrac{mx + p}{ax^2 + bx + c}$.



3) La fonction f est définie sur :

a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R} - \{4\}$ c) $\mathbb{R} - \{-1\,;\,7\}$ d) $[-1\,;\,7]$

4) L'équation $f(x) = 1$ a pour ensemble solution

a) $S = \left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$ b) $S = \{0\}$ c) $S = \{-1\,;\,7\}$ d) $S = \{0\,;\,4\}$

5) Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{2x+3}$. Sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right[$ on a :

a) $f'(x) = \dfrac{3(x+1)}{\sqrt{2x+3}}$ c) $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{2x+3}}$

b) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x+3}}$ d) $f'(x) = \dfrac{5x+6}{\sqrt{2x+3}}$

EXERCICE 2

Fonctions dérivées **(6 points)**

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant les valeurs pour lesquelles le calcul est valable et en factorisant lorsque cela est possible.

1) $f(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - 6x^2 + 7$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$

3) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{2x - 7}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$

5) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$

6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$

EXERCICE 3

Étude d'une fonction **(5 points)**

Soit la fonction f définie sur $[-3\,;\,3]$ par : $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 1$

1) Étudier la parité de la fonction f.
   Quelle est la conséquence sur la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
2) Déterminer $f'(x)$ que l'on factorisera.
3) Résoudre $f'(x) = 0$ puis étudier le signe de $f'(x)$ à l'aide d'un tableau de signes.
4) Dresser le tableau de variation de f sur $[-3\,;\,3]$.
   On donnera les valeurs en -3 et 3 et les valeurs des extremum.
5) Déterminer l'équation de la tangente T_1 au point d'abscisse 1.

EXERCICE 4

Vase **(4 points)**

Un artisan fabrique des vases. Sa capacité de production est limitée à 60 vases.
Le coût de production de x vases, en euros, est modélisé par la fonction C sur $[0\,;\,60]$ par :

$$C(x) = x^2 - 10x + 500$$

Chaque vase est vendu 50 €. Les recettes sont modélisées par une fonction R sur $[0\,;\,60]$.

1) Calculer le coût et la recette réalisés lorsque l'artisan produit et vend 40 vases.
   Quel est alors le bénéfice de l'artisan ?
2) Le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est modélisé par la fonction B sur $[0\,;\,60]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Montrer que l'on peut mettre $B(x)$ sous la forme : $B(x) = (10 - x)(x - 50)$.
   b) Déterminer le nombre de vases à produire et à vendre pour que l'artisan réalise un bénéfice (positif).
   c) Déterminer $B'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction B sur $[0\,;\,60]$ et en déduire le bénéfice maximum et le nombre de vases à produire et à vendre pour le réaliser.