Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 13 février 2023

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse c)** car $5 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 5$.
2) **Réponse a)** car f est une fonction homographique de la forme : $f(x) = \dfrac{a}{x-\alpha} + \beta$ avec $a = -3$ donc la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;4[$ et sur $]4\,;+\infty[$
3) **Réponse d)** d'après le graphique $f'(-1) = -2$, et $f'(0) = 3$.

   Prendre deux points sur la tangente et déterminer $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
4) **Réponse b)** on a $y = f'(-1)(x+1) + f(1) \Leftrightarrow y = -2(x+1) - 3 \Leftrightarrow y = -2x - 5$.
5) **Réponse c)** À partir de $\mathscr{C}'_f$ on peut déduire tableau de variation :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

EXERCICE 2

Fonctions dérivées **(6 points)**

1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 6$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = 3(-x^2 + 2x + 3)$.
2) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$, forme $\left(\dfrac{1}{u}\right)'$.
3) $f(x) = 2x\sqrt{x+3}$ dérivable sur $]-3\,;+\infty[$, , forme $(uv)'$:

   $$f'(x) = 2\sqrt{x+3} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2x+6+x}{\sqrt{x+3}} = \frac{3(x+2)}{\sqrt{x+3}}$$
4) $f(x) = \dfrac{7x-4}{2-x}$ dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$, forme $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$.

   $$f'(x) = \frac{7(2-x) - (-1)(7x-4)}{(2-x)^2} = \frac{14 - 7x + 7x - 4}{(2-x)^2} = \frac{10}{(2-x)^2}.$$
5) $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{3}{2x+5}$ dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$, formes $(u+v)'$ et $\left(\dfrac{1}{u}\right)'$.

   $$f'(x) = 2 - \frac{-3\times 2}{(2x+5)^2} = \frac{2(2x+5)^2 + 6}{(2x+5)^2} = \frac{2(4x^2 + 20x + 25 + 3)}{(2x+5)^2} = \frac{8(x^2+5x+7)}{(2x+5)^2}.$$
6) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, forme $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$.

   $$f'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x(1+x+1-x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}.$$

EXERCICE 3

Coût moyen **(4 points)**

1) $f(2) = \dfrac{0,5(8) + 3(4) + 2 + 16}{2} = 5.$

Le coût moyen de production d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces est de 5 milliers d'euros.

2) $f'(x) = \dfrac{x(1,5x^2 - 6x + 1) - 1(0,5x^3 - 3x^2 + x + 16)}{x^2} = \dfrac{1,5x^3 - 6x^2 + x - 0,5x^3 + 3x^2 - x - 16}{x^3}$

$= \dfrac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^2}.$

Développons : $(x-4)(x^2+x+4) = x^3 + x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 16 = x^3 - 3x^2 - 16.$

On a donc : $f'(x) = \dfrac{(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}.$

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x^2 + x + 4 \overset{\Delta=-15}{\Leftrightarrow} x = 4.$

Signe de $f'(x)$ = signe de $(x-4)$ car $\forall x \in [1\,;5]$, $x^2 + x + 4 > 0$.

x	1		4		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	14.5	$\searrow$	1	$\nearrow$	1.7

4) Il faut fabriquer 4 000 pièces pour que le coût moyen de production d'une pièce soit minimal. Le coût est alors de 1 000 €.

EXERCICE 4

Piscine **(5 points)**

1) D'après la surface du terrain et du schéma, on a :

$(x+2)(y+3) = 54 \Leftrightarrow y + 3 = \dfrac{54}{x+2} \Leftrightarrow y = \dfrac{54}{x+2} - 3 = \dfrac{54 - 3x - 6}{x+2} = \dfrac{48 - 3x}{x+2}.$

2) Surface de la piscine pour $x = 3$: $3 \times \dfrac{48 - 3 \times 3}{3 + 2} = 23,4\ \text{m}^2.$

3) $f(x) = xy = \dfrac{x(48-3x)}{x+2} = \dfrac{48x - 3x^2}{x+2}$

4) $f'(x) = \dfrac{(48-6x)(x+2) - 1(48x - 3x^2)}{x+2)^2} = \dfrac{48x + 96 - 6x^2 - 12x - 48x + 3x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{-3x^2 - 12x + 96}{(x+2)^2}$

5) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 12x + 96 = 0 \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} -x^2 - 4x + 32 = 0$

$\Delta = 16 + 128 = 144 = 12^2$ d'où $x_1 = \dfrac{4+12}{-2} = -8$ (non retenu) ou $x_2 = \dfrac{4-12}{-2} = 4$

x	0		4		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	24	$\searrow$	$\approx 23,6$

La surface de la piscine est maximale pour $x = 4$. On a alors $y = 6$.

Les dimensions de la piscine sont alors : $4\ \text{m} \times 6\ \text{m}$