Notions de fonctions

Exercice 1 - partie A

Des fruits sont vendus 2 € par kilogramme.

a. Compléter le tableau suivant :

Masse en kg	1	2,5	6	8,5
Prix en €				

b. Que peut-on dire de la masse et du prix ?

c. Comment obtient-on le prix à partir de la masse ?

Exercice 1 - partie B

a. « Ce procédé, c'est un peu comme dans une usine », déclare Aurélien qui aime bien l'aspect concret, « imaginons une usine dans laquelle on entre la matière première x et dont il sort x^2+2. »

$x \rightarrow$  $\rightarrow x^2+2$

Calculer ce qui sort de l'usine si on y entre :

2 ; 3 ; 5 ; 8 ?

b. Calculer ce qui est entré dans l'usine lorsqu'il en sort :

3 ; 18 ; 102 ; 51 ?

Exercice 1 - partie C

Gaëlle, la grande sœur d'Aurélien, lui répond :

« En maths, cette usine s'appelle une **fonction mathématique**. On la note $x \mapsto x^2+2$ et le nombre x^2+2 s'appelle l'image du nombre x. »

Selon Gaëlle, quelle est l'image :

a. du nombre 5 par la fonction $x \mapsto 3x$?

b. du nombre -3 par la fonction $x \mapsto 10-x$?

c. du nombre 2 par la fonction $x \mapsto x^3+x^2+x+1$?

Exercice 1 - partie D

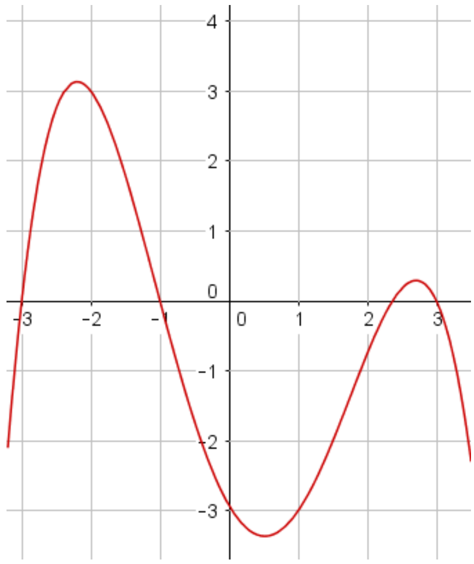
Elise, la sœur jumelle de Gaëlle, poursuit pour Aurélien :

«Si tu appelles f ton usine, euh… pardon… ta fonction $x \mapsto x^2+2$, l'image de 4 par la fonction linéaire f se note $f(4)$. On a donc $f(4)=4^2+2=16+2=18$ ».

Calculer : $f(0)$; $f(9)$; $f(-2)$

Exercice 2

Voici le graphe d'une fonction f .



a. Donner l'image de 3 par f .

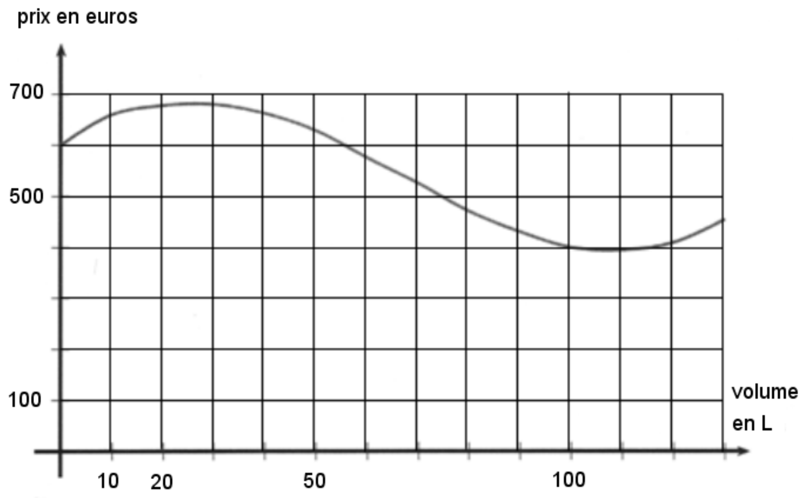
b. Donner $f(1)$.

c. Quel est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse -2 ?

d. Quels sont les antécédents de 0 par f ?

e. Donner un nombre qui n'a pas d'antécédent par f .

Exercice 3



Une usine fabrique du jus de fruits. Soit f une fonction qui, à une quantité de jus fabriquée en litre(s) associe le coût de fabrication en €.

On a représenté ci-dessus la fonction f pour une quantité de jus comprise entre 0 et 130 litres.

À l'aide du graphique, répondre par des phrases aux questions suivantes :

a. Donner le coût de fabrication de 100 litres de jus.

b. Pour quelle(s) quantité(s) de jus, le coût de fabrication est-il supérieur à 600 € ?

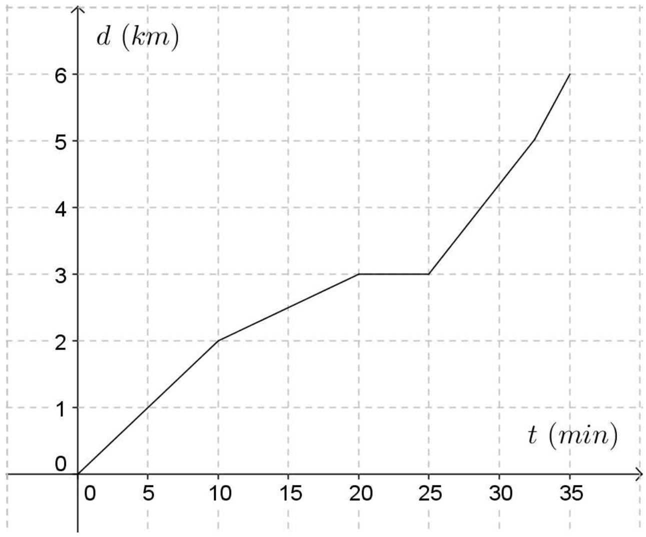
c. Donner l'image de 85 par la fonction f .

d. Lire $f(75)$.

e. Donner le(s) antécédent(s) de 600 par la fonction f .

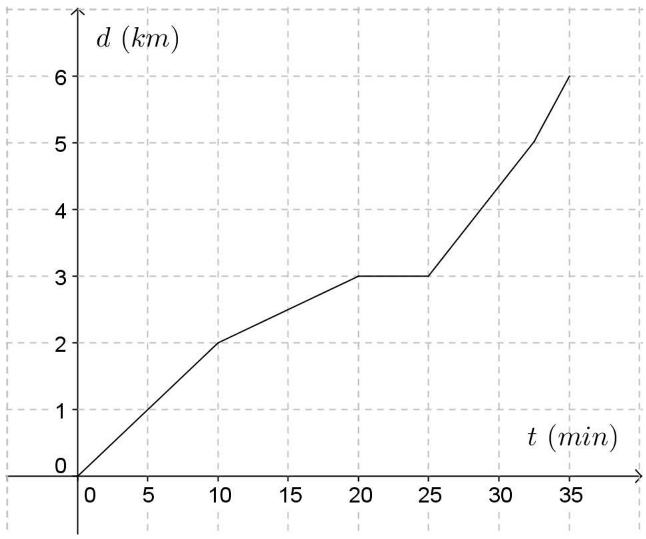
Exercice 4 - partie A

La courbe ci-contre représente la distance d parcourue par un coureur à pied, en km, en fonction de la durée t de parcours, en minutes. Ce coureur s'efforce de maintenir, sur terrain plat, une vitesse constante égale à 12 km.h^{-1}.



a. Peut-on dire que la vitesse du sportif a été constante durant toute sa course ?
b. Le coureur s'est-il arrêté ? Si oui, pendant combien de temps ?

Exercice 4 - partie B



a. Quelle est l'image de 5 par la fonction $d : t \mapsto d(t)$?
   Quelle distance le coureur a-t-il parcourue après 5 minutes de course ?
b. Quel est l'antécédent de 6 par la fonction $d : t \mapsto d(t)$?
   Quelle a été la durée du parcours de 6 km effectuée par le coureur ?
c. Pendant sa course, le coureur a gravi une côte. Quand a certainement dû débuter l'ascension de cette côte ? Quelle était la longueur de cette côte ?
d. Pourquoi peut-on supposer que les 10 dernières minutes de course furent effectuées en descente ?
e. Quelle a été la vitesse moyenne de ce coureur durant les 10 dernières minutes de course ?
f. Quelle a été la vitesse moyenne sur l'ensemble de la course (arrondir au dixième de km.h^{-1}) ?

Exercice 5

On donne la fonction $f : x \mapsto -x+1$.

a. Déterminer les images de $\frac{-3}{2}$, 1, $\frac{5}{2}$ et 4. Placer vos résultats dans un tableau.
b. Tracer un repère, et placer les quatre points dont les coordonnées sont dans votre tableau.
c. Construire la courbe associée à la fonction f.
d. Déterminer graphiquement un antécédent de 2.

Exercice 6

Soit la fonction $f : x \mapsto (x+2)^2 - x^2 - 4x$

a. Calculer $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$.

b. Que constatez-vous ?

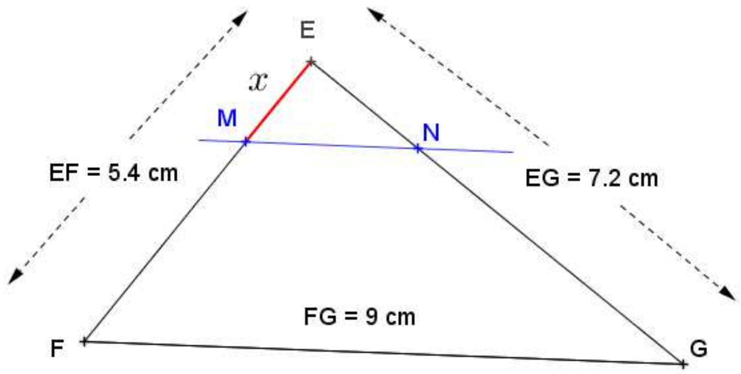
c. Développez et réduisez l'expression de $f(x)$.

Exercice 7 - partie A

Considérons un triangle EFG, de base $[FG]$ tel que : $EF = 5,4$ cm ; $EG = 7,2$ cm ; $FG = 9$ cm.

Soit M un point de $[EF]$ tel que $EM = x$.

Par M on mène la parallèle à la base $[FG]$; elle coupe le côté $[EG]$ en N.



a. Calculer EN en fonction de x.

b. Démontrer que le triangle EFG est rectangle en E.

c. En déduire l'aire du triangle EMN en fonction de x

Exercice 7 - partie B

a. On considère la fonction $A : x \mapsto \frac{2}{3}x^2$, correspondant à l'aire du triangle EMN.

Sur le graphique ci-dessous, on a porté la longueur x en abscisse et l'aire $A(x)$ du triangle EMN en ordonnée.

Lire la valeur approchée de l'aire du triangle EMN lorsque $x = 3$ cm.

b. Lire une valeur approximative de x pour laquelle l'aire du triangle est égale à 13 cm^2.

c. Retrouver les résultats des deux questions précédentes par le calcul.

Notions de fonctions - corrigé

Exercice 1 - partie A - corrigé

a. Tableau

Masse en kg	1	2,5	6	8,5
Prix en €	2	5	12	17

$\times 2$

b. Le prix est le double de la masse.
c. En la multipliant par 2

Exercice 1 - partie B - corrigé

a. $2 \longrightarrow 2^2 + 2 = 4 + 2 = \boxed{6}$

$3 \longrightarrow 3^2 + 2 = 9 + 2 = \boxed{11}$

$5 \longrightarrow 5^2 + 2 = 25 + 2 = \boxed{27}$

$8 \longrightarrow 8^2 + 2 = 64 + 2 = \boxed{66}$

b. $\boxed{1} \longrightarrow 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$

$\boxed{4} \longrightarrow 4^2 + 2 = 16 + 2 = 18$

$\boxed{10} \longrightarrow 10^2 + 2 = 100 + 2 = 102$

$\boxed{7} \longrightarrow 7^2 + 2 = 49 + 2 = 51$

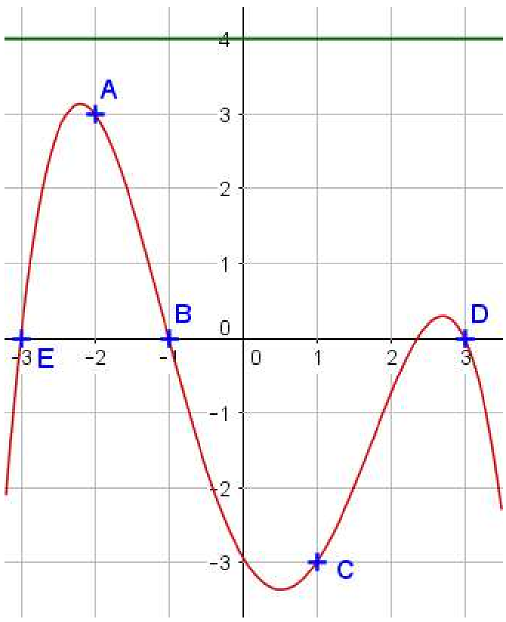
Exercice 1 - partie C - corrigé

a. $5 \mapsto 3 \times 5 = 15$
b. $-3 \mapsto 10 - (-3) = 13$
c. $2 \mapsto 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$

Exercice 1 - partie D

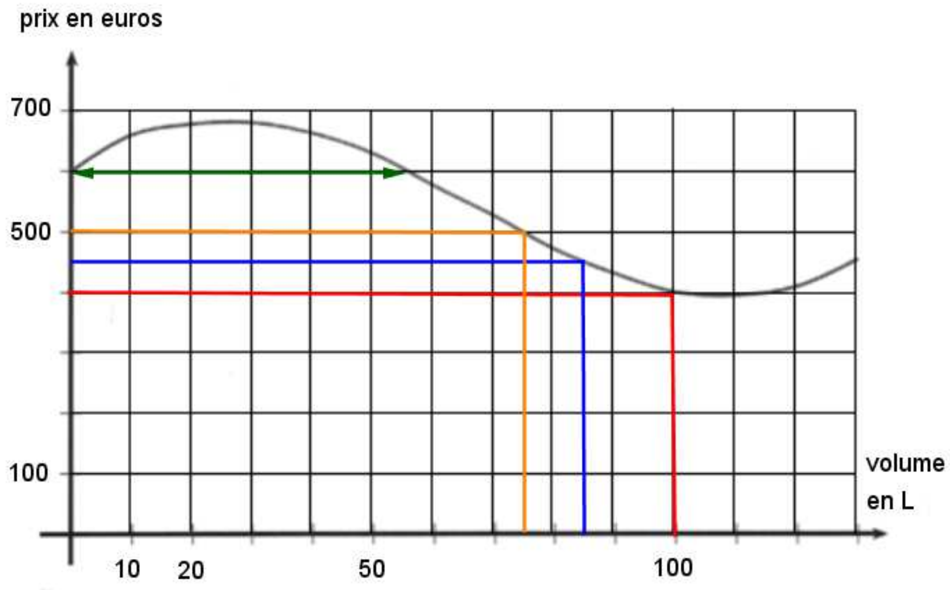
$f(0) = 0^2 + 2 = 2$ $f(9) = 9^2 + 2 = 81 + 2 = 83$ $f(-2) = (-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$

Exercice 2 - corrigé



a. L'image de 3 par f est 0 (point D).
b. $f(1) = -3$ (point C)
c. L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse -2 est 3 (point A)
d. Les antécédents de 0 sont -1 et 3 (points E, B et D).
e. Par exemple 4 n' pas d'antécédent par f (en tous cas sur la partie représentée sur ce graphe). En effet, la courbe de f ne possède aucun point d'intersection avec la droite rouge, correspondant aux points d'ordonnée 4 (voir droite couleur verte).

Exercice 3 - corrigé



a. 100 litres de jus coûtent 400 € (tracé rouge).
b. Le coût de fabrication est supérieur à 600 € entre 0 et 55 L (tracé vert).
c. L'image de 85 par la fonction f est 450 (tracé bleu).
d. $f(75)=500$ (tracé orange).
e. Les antécédents de 600 par la fonction f sont 0 et 55 (pointes de flèches vertes).

Exercice 4 - partie A - corrigé

a. Non, car sa progression n'est pas représentée par une ligne droite.
b. Oui, il s'est arrêté pendant 5 minutes entre la $20^{ème}$ et la $25^{ème}$ minutes, où il reste bloqué au $3^{ème}$ kilomètre.

Exercice 4 - partie B - corrigé

a. L'image de 5 par la fonction d est 1, ou encore $d(5)=1$. Le coureur a donc parcouru 1 km au bout de 5 minutes de course.
b. L'antécédent de 6 par est 35, ou encore $d(35)=6$. Le parcours de 6 km a été effectué par le coureur en 35 minutes.
c. Pendant sa course, le coureur a gravi une côte entre la $10^{ème}$ et la $20^{ème}$ minute. Il n'a couru cette côte d'un kilomètre qu'en mettant 10 minutes.
d. C'est le moment où il parcourt un maximum de distance en un minimum de temps. Il s'agit vraisemblablement d'une descente. Il a même encore accéléré sur la toute fin du parcours.
e. En 10 minutes, il a parcouru 3 kilomètres. En une heure, soit $60=6\times10$ minutes, par proportionnalité, il aurait parcouru $3\times6=18$ km. Sa vitesse moyenne sur les 10 dernières minutes est donc de $18\,\text{km.h}^{-1}$.

Autre méthode : $d=3\,\text{km}$; $t=\dfrac{10}{60}\,\text{h}$ donc $v=\dfrac{d}{t}=\dfrac{3}{\frac{10}{60}}=18\,\text{km.h}^{-1}$

f. $d=6\text{ km}\ ;\ t=\frac{35}{60}\text{h}$ donc $v=\frac{d}{t}=\frac{6}{\frac{35}{60}}\simeq 10{,}3\text{ km.h}^{-1}$

La vitesse moyenne sur l'ensemble de la course était d'environ $10{,}3\text{ km.h}^{-1}$

Autre méthode : par tableau de proportionnalité :

distance	6	10,3
temps	35	60

Exercice 5 - corrigé

a. $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\left(-\frac{3}{2}\right)+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$

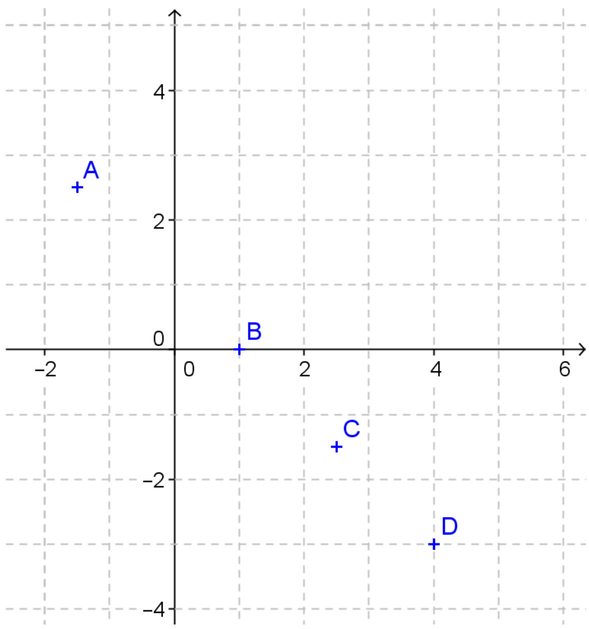
$f(1)=-1+1=0$

$f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{5}{2}+1=-\frac{3}{2}$

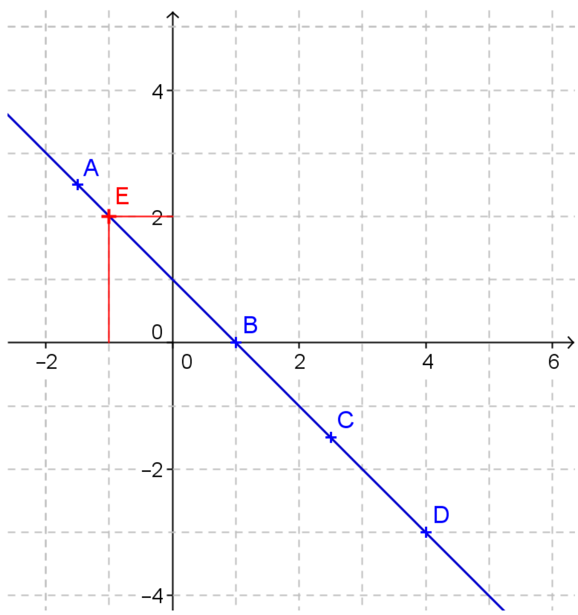
$f(4)=-4+1=-3$

x	$-\frac{3}{2}=-1{,}5$	1	$\frac{5}{2}=2{,}5$	4
$f(x)$	$\frac{5}{2}=2{,}5$	0	$-\frac{3}{2}=-1{,}5$	-3

b.



c.



d. En observant le point E ci-dessus, on a -1 pour antécédent de 2, soit $f(-1)=2$

Exercice 6 - corrigé

a. $f(-2)=(-2+2)^2-(-2)^2-4\times(-2)$
$=0^2-4+8$
$=4$

$f(-1)=(-1+2)^2-(-1)^2-4\times(-1)$
$=1^2-1+4$
$=4$

$f(0)=(0+2)^2-0^2-4\times0$
$=2^2$
$=4$

$f(1)=(1+2)^2-1^2-4\times1$
$=3^2-1-4$
$=4$

$f(2)=(2+2)^2-2^2-4\times2$
$=4^2-4-8$
$=4$

Toutes les valeurs sont égales à 4.

b. $f(x)=(x+2)(x+2)-x^2-4x$

$=x\times x+x\times 2+2\times x+2\times 2-x^2-4x$

$=x^2+2x+2x+4-x^2-4x$

$=4$

Ce qui confirme que toutes les images de n'importe quelle valeur x par f valent 4, conformément aux résultats du a.

Remarque : avec identité remarquable, on pouvait écrire plus rapidement :
$(x+2)^2=x^2+2\times x\times 2+2^2=x^2+4x+4$

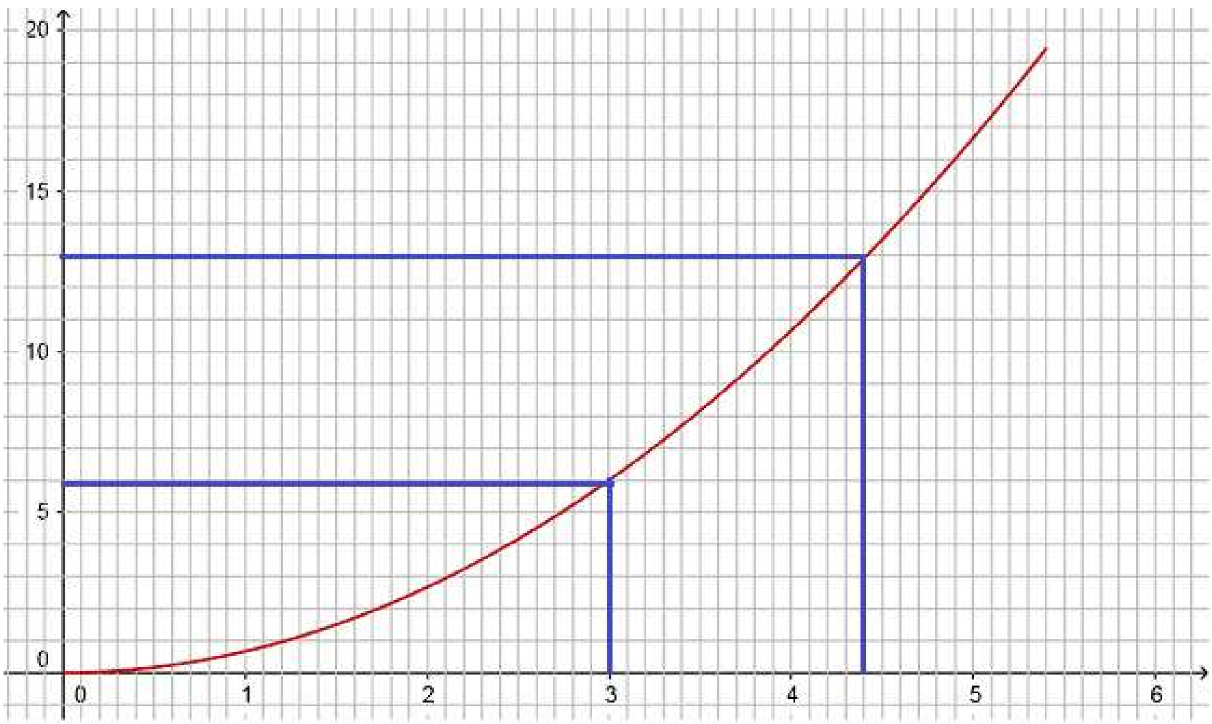
Exercice 7 - partie A - corrigé

a. Les points E, M, F et E, N ,C sont alignés sur deux droites sécantes. De plus $(\mathrm{MN})//(\mathrm{FG})$.
D'après le théorème de Thales : $\dfrac{\mathrm{EM}}{\mathrm{EF}}=\dfrac{\mathrm{EN}}{\mathrm{EG}}=\dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{FG}}$ soit $\dfrac{x}{5,4}=\dfrac{\mathrm{EN}}{7,2}=\dfrac{\mathrm{MN}}{9}$.
Finalement $\mathrm{EN}=\dfrac{7,2\times x}{5,4}=\dfrac{72}{54}x=\dfrac{4}{3}x$

b. $\mathrm{FG}^2=9^2=81$ et $\mathrm{EF}^2+\mathrm{EG}^2=5,4^2+7,2^2=29,16+51,85=81$
D'après le théorème de Pythagore (sa réciproque) : EFG est rectangle en E.

c. EMN est lui aussi rectangle en E donc $aire(\mathrm{EMN})=\dfrac{\mathrm{EM}\times\mathrm{EN}}{2}=\dfrac{x\times\frac{4}{3}x}{2}=\dfrac{\frac{4}{3}x^2}{\frac{2}{1}}=\dfrac{4}{3}x^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}x^2$.

Exercice 7 - partie B - corrigé



a. Lorsque $x=3\,\mathrm{cm}$, l'aire de EMN vaut $A(3)=6$.

b. L'antécédent de 13 semble être $4,4$ donc $A(4,4)=13$.

c. Par le calcul $A(3)=\frac{2}{3}\times 3^2=6$ (résultat confirmé)

et $A(x)=\frac{2}{3}x^2=13 \Leftrightarrow x^2=13\times\frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2=19,5 \Leftrightarrow x=\sqrt{19,5}\simeq 4,4$ (résultat très proche de la lecture graphique).